SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ

MATEMATIČKO FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

1
GOD. X.

ZAGREB
1959 – 60

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NRH

»MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST za učenike srednjih škola« izlazi u četiri broja po 40—48 stranica. Za vrijeme ferija list ne izlazi.

Pretplata za 4 broja iznosi Din 260. — — Pojedini se broj prodaje po Din 70.— Pretplatu i narudžbe slati na adresu: »MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST«, Zagreb, Ilica 16/III., pošt. pretinac 165 ili na čekovni račun broj 400-73-5-1884 — Pretplata se može slati i poštanskom uplatnicom.

SADRŽAJ

VLASNIK SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ
IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA N. R. HRVATSKE

Tisak Grafičkog zavoda Hrvatske

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

GODINA X. BROJ 1 | ZAGREB | ŠKOL. GOD. 1959. — 1960.

Deseta godina Matematičko-fizičkog lista

Ova je godina jubilarna godina Matematičko-fizičkog lista: list ulazi u desetu godinu svog izlaženja.

Ako se osvrnemo na ukupno djelovanje našeg lista kroz proteklih 9 godina, možemo ustvrditi, da je on doista dobro ispunjao svoj zadatak.

Osnovan je zaključkom I. kongresa matematičara i fizičara FNRJ na Bledu u studenom 1949.

Jedan od osnovnih zadataka našeg novog društvenog života bio je odgojiti i izobraziti što više kvalificiranih stručnjaka u svim područjima ljudske djelatnosti, pa je bilo potrebno za naše učenike stvoriti čvrste preduvjete za uspješno stručno obrazovanje.

Kongres je razmatrao taj osnovni zadatak s obzirom na matematiku i fiziku i stao na stanovište, da se toj osnovnoj potrebi može udovoljiti, ako se osnuje list, koji bi proširivao i udopunjavao znanje učenika stečeno u srednjoj školi, razvijao ga i dalje produbljavao.

Toj odluci kongresa pridonijela je također i činjenica da je poslije Drugog svjetskog rata bilo velikih nedostataka u znanju i shvaćanju matematike i fizike u našim srednjim školama, jer je zbog teških ratnih prilika rad u razredima bio slab, obuke vrlo često nije bilo, pak se kadšto ni najosnovnije gradivo nije moglo svladati.

Plenum novo osnovanog Saveza društava matematičara i fizičara FNRJ na svojoj prvoj sjednici raspravio je to pitanje i zaključio, da se izdaje »Matematičko-fizički list za učenike srednjih škola« i taj je zadatak povjerio Društvu matematičara i fizičara NR Hrvatske.

Društvo matematičara i fizičara NRH odmah je započelo predradnje, da list uzmogne izaći što prije. Ono je imenovalo uređivački odbor i glavno uredništvo.

Glavno je uredništvo povjerilo doc. Milenku Sevdiću, a tehničko uredništvo prof. Stjepanu Škreblinu. U uređivački odbor ušli su profesori F. Ahlin iz Ljubljane, I. Bandić iz Beograda, F. Hrabak i G. Šindler iz Zagreba, P. Jovanović iz Cetinja, M. Lazić iz Mostara i T. Nikolovski iz Skopja.

Uređivački odbor, koji se nalazio u Zagrebu, u skladu sa zadacima lista, odredio je oblik, opseg i rubrike lista, koje su se u glavnim crtama održale do danas. To su:

1. *Članci;* 2. *Iz moje radionice i laboratorija;* 3. *Zanimljivosti i razno;* 4. *Kronika;* 5. *Nove knjige;* 6. *Zadaci i rješenja;* 7. *Pismeni zadaci iz matematike na ispitu zrelosti u nekim školama.*

Tim su rubrikama dodane kasnije još i ove:

8. *Vježbe za učenike viših razreda gimnazije;* 9. *Vježbe za učenike VIII. razreda osmogodišnje škole;* 10. *Vježbe iz fizike za učenike IV. — VI. razreda gimnazije.*

Kroz 9 godina list je po mišljenju redakcije uvijek ostao vjeran zadatku, što mu je bio postavljen. Kroz to je vrijeme na gotovo 1450 stranica donio veliki broj raznih članaka, prikaza, zadataka i vježbi; u listu je ukupno izašlo 205 članaka, 41

prikaz iz »Moje radionice i laboratorija«, 192 zanimljivosti, 375 zadataka iz matematike, 180 zadataka iz fizike, 362 rješenja iz matematike, 175 rješenja iz fizike, 27 vježbi za učenike viših razreda gimnazije, s ukupno 104 riješena zadatka, 355 vježbi za VIII. razred osmogodišnje škole, 27 prikaza novih knjiga, 134 zadataka iz matematike za pismeni ispit zrelosti, od toga 21 potpuno riješenih, 10 riješenih zadataka za prijemni ispit na tehničkom fakultetu u Zagrebu god. 1950, 22 zadatka iz fizike za učenike IV. — VI. razreda gimnazije s neposrednim rješenjima, 5 prikaza u rubrici »Kronika«, 10 takmičenja iz matematike u raznim našim republikama, 1 takmičenje iz fizike, 9 križaljki ili ukrštenica.

Kad bi se pregledala i proučila sva ta građa, što ju je Matematičko-fizički list donio za 9 godina svog izlaženja, možemo zaista reći, da je list učenicima srednjih škola pružio široke mogućnosti, da se skup njihovog znanja iz matematike i fizike proširi i produbi.

U člancima su obrađivana i proširivana ne samo sva područja elementarne matematike, koja se uči u srednjoj školi, već su se učenici upućivali i u druga područja, koja su nastavnim programom malo ili nikako obuhvaćena.

Dat je na pr. ciklus članaka o neeuklidskim geometrijama, bilo je članaka o neodređenoj analizi, o teoriji skupova, iz teorije brojeva, teorije relativnosti i t. d.

U fizici je među ostalim granama naročito zastupana atomska fizika, te je dano oko 27 koje članaka koje prikaza iz tog područja. List je zabilježio važne godišnjice u fizici: tako na pr. 50 godišnjicu motorne avijacije, 300 godišnjicu pokusa sa magdeburškim polukuglama, stogodišnjicu rođenja N. Tesle. Povodom desetgodišnjice Oslobođenja donijet je članak »Fizika u novoj Jugoslaviji«. Donijeti su prikazi o životu i radu nekih velikih matematičara i fizičara naših i inozemnih, tako na pr. o Tesli, M. Petroviću, Pupinu, A. Mohorovičiću, Euleru, Gaussu, Millikanu, Galois-u, Cauchy-u, Lobačevskom, Bolyai-u kao i starim matematičarima Talesu iz Mileta, Pitagori, Arhimedu, Ahmesu i njegovoj Računici. Bilo je više članaka o praktičnom računjanju i računanju s pomoću tablica. Doneseni su i članci o ulozi i značenju matematike kao odgojnog sredstva.

Iznesena su razna pitanja, koja su obrađivali već stari matematičari. Također je dan prikaz o razvoju matematičkih i fizikalnih nauka u Dalmaciji do 17. vijeka kao i o razvoju matematike i fizike u sjevernim krajevima Hrvatske.

A i iz područja astronomije doneseno je nekoliko članaka. Nisu izostali ni članci ni prikazi o jednom od najvećih triumfa ljudskog uma i tehničkih dostignuća, o umjetnim satelitima i umjetnim planetima.

Revnim i ambicioznim učenicima mnogo se dopala rubrika »Vježbe u matematici za više razrede gimnazije«. Dobili smo od samih učenika otvorenih priznanja, da im se ta rubrika mnogo sviđa i da su iz nje mnogo naučili.

U toj rubrici bila su prikazana i mnogim lako razumljivim primjerima objašnjena neka interesantna područja matematike, koja se uglavnom ne uče u srednjoj školi. Tako na pr. determinante, Descartesov teorem, trigonometrijsko rješavanje kvadratnih jednadžbi, Hornerova divizija, položaj brojeva prema korijenima kvadratne jednadžbe, verižno dijeljenje, Diofantske jednadžbe, rješavanje kvadratnih jednadžbi metodom sukcesivnih aproksimacija, jednostavni način rješavanja općih jednadžbi 3. stupnja, o isporeďivanju korijena dviju kvadratnih jednadžbi, u kojima dolazi promjenljivi parametar, prvi počeci infinitezimalnog računa i t. d.

Mnogi su učenici te vježbe usvojili i odlično rješavali zadatke, koji se na njih odnose, što je dalo redakciji mnogo volje i poticaja za daljnji slični rad.

U listu zapremaju vrlo važno mjesto »Zadaci iz matematike i fizike« kao i njihova rješenja. To je rubrika pomoću koje su učenici i redakcija u stalnom

kontaktu. Na tom su mjestu postavljeni za rješavanje zadaci različitih stepena teškoće i odmah u slijedećem broju donesena su najbolja rješenja, koja su pravodobno stigla s imenima učenika, koji su ih riješili, a također se navode i imena ostalih učenika, koji su zadatke također s uspjehom riješili. Tu se učenici potiču na takmičenje i u njima se budi opći interes za matematiku i fiziku. Oni se postepeno privikavaju na rješavanje najraznovrsnijih problema iz raznih područja matematike i fizike. Tim se zadacima nastoji također postići da učenici steknu sigurne osnove za eventualni daljnji studij matematike i fizike.

Iz rješenja zadataka matematike i fizike može se uočiti, da su u našem listu izašli na vidjelo mnogi vrlo bistri, nadareni i pronicavi učenici s velikim znanjem i shvaćanjem matematike i fizike, koji su dali vrlo inteligentna i često dublje zamišljena rješenja.

Počevši od godine 1955—1956 redakcija je imena takvih učenika u zadnjem broju napose štampala i nagrađivala ih raznim matematičkim i fizičkim knjigama.

Tako je godine 1955/56 nagrađeno 16 učenika iz matematike, 7 iz fizike, godine 1956/57 13 učenika iz matematike, 10 iz fizike, 1957/58 18 učenika iz matematike, 9 iz fizike, a 1958/59 16 učenika iz matematike, 6 iz fizike.

Zasluga je našega lista, da je te učenike pronašao, istaknuo ih i predstavio ih svima onima, koji u našoj državi njeguju matematiku i fiziku. Gotovo svi ti učenici studiraju ili su studirali matematiku i fiziku ili tehničke nauke, te se i dalje odlikuju i svojim radom i svojim znanjem.

»Vježbe za učenike 8. razreda osmogodišnje škole« mnogo pomažu učenicima najviših razreda tih škola. Stigla su nam pisma, gdje nam učenici priznaju, da su te vježbe mnogo doprinijele da su popravili svoje ocjene i da dobro napreduju u matematici i fizici.

U prvoj godini naš list imao je 10 000 pretplatnika, u 2. godini 5 000, a u 3. godini 6 705, u 4. godini 9 100, u 5. godini 9 657, u 6. godini 10 991, u 7. godini 12 419, u 8. godini 13 730, u 9. godini 14 801. Od tih 14 801 pretplatnika otpalo je na NRH 4 390, NR S 5 925, na LR S 843, na NR B i H 1 427, na NR M 1 115 i na NR CG 1 101.

Da se list u tolikom broju raširio, velika je zasluga naših povjerenika, od kojih mnogi vode brigu za naš list još od prvog njegovog godišta.

Redakcija se povjerenicima najljepše zahvaljuje i ujedno ih moli za daljnju dobrohotnu suradnju.

Broj učenika koji surađuju u našem listu, sve je više rastao. Dok je u prvom godištu bilo iz matematike ukupno 91 rješavatelja sa 378 rješenja, u 1958/59 bilo je 159 rješavatelja sa 1 358 rješenja.

Osobito je poskočio broj rješavatelja u NR S, kojih je godine 1950/51 bilo 20 sa 36 rješenja, a 1958/59 80 sa 647 rješenja, u NR CG kojih je prve godine bilo 5 sa 37 rješenja, a 1958/59 20 sa 110 rješenja i NR M koja u prvoj godini nije imala ni jednog rješavatelja, a 1958/59 imala je 14 rješavatelja sa 76 rješenja.

Još je prema godini 1950/51 povoljniji omjer u fizici. U prvom godištu bilo je iz fizike samo 5 rješavatelja s 8 rješenja, a 1958/59 bilo je 25 rješavatelja sa 163 rješenja. U rješavanju zadataka iz fizike osobito se ističe NRH s 59 rješenja i LRS s 54 rješenja.

Ma da se list raširio u priličnom broju u cijeloj državi i sve se više širi, ipak još ima gimnazija i srednjih stručnih škola, u koje list dosad nije uspio prodrijeti. Redakcija će po svojim silama nastojati, da list uđe i u te škole.

Naš list okupio je u suradnji profesore sveučilišta, visokih škola, viših škola, srednjih škola, nastavnike osnovnih škola, studente i učenike srednjih škola. Svi se oni iz svih krajeva naše države nalaze na okupu imajući pred sobom veliki zajednički cilj: dati učenicima ono, što iz oblasti matematike i fizike može proširiti i produbiti njihovo znanje i učiniti ih što spremnijim za daljnje studije i daljnji rad.

Suradnja je tolika, da u našoj redakciji ima mnogo rukopisa, koji su podesni da budu štampani, ali zbog pomanjkanja prostora nisu dosad mogli biti uzeti u obzir.

U prvih pet godina svog izlaženja list je, da bi mogao izlaziti, dobivao određenu subvenciju, počevši od šestog godišta list izlazi bez subvencije.

Kroz proteklih 9 godina bilo je promjena u uredništvu i uređivačkom odboru. Doc. M. Sevdić, pošto je uredio 1. i 2. godište kao i 1. broj 3. godišta, zbog preopterećenosti drugim poslovima, zahvalio se na glavnom uredništvu, a Društvo mat. i fiz. NRH povjerilo je taj zadatak prof. V. P. Š. Alfredu Kurelcu. U siječnju 1956. prof. Kurelec zbog velike zauzetosti svojim redovnim poslovima i zbog preuzimanja novih dužnosti zahvalio se na glavnom uredništvu, a dužnost glavnih urednika povjerilo je Društvo mat. i fiz. NRH doc. dr. Branimiru Markoviću i prof. S. Škreblinu. U uređivački odbor ušli su prof. Elza Vernić i Milan Krajnović, iz Zagreba. Mjesto P. Jovanovića iz Cetinja od 1957/58 član je uređivačkog odbora prof. Kosmajac Momčilo.

Istaknimo još i to, da u našim skladištima nema ni jednog broja 1 i ni jednog broja 2 od posljednjih pet godina. To znači da se je tih godina list jače širio negoli je redakcija mogla predvidjeti. Prošle se godine štampala dva izdanja 1. broja, ali to još uvijek nije bilo dovoljno. Zato uprava ne može nažalost zadovoljiti novim narudžbama tih brojeva, koje joj neprestano stižu.

Naš list će i dalje ustrajati na dosadanjem putu nastojeći da učenicima dade što više iz područja matematike i fizike i da u njima pobudi što veći interes za te nauke, koje su od osnovne važnosti za odgoj čovjeka i stvaranje naučnih metoda mišljenja. Ipak naši učenici treba da imaju na umu da se uspjesi u matematici i fizici općenito ne mogu postići lako i bez napora, već je taj uspjeh vezan marljivim radom, ustrajnim učenjem i ponajviše dubokim razmišljanjem. Ali rezultati tih napora su veliki; oni bude u učenika osjećaj snage i zadovoljstva i usmjeruju ih na važan i sadržajan put u životu.

S. Š.

Rasprostiranje zvuka kroz atmosferu

IVO PENZAR, Zagreb

Odavna je već ljudima poznato, da zrak prenosi zvuk od njegovog izvora do našeg uha. Naime, kad neko tijelo zatitra, ono svoje titraje prenosi na molekule okolnog zraka, pa se i one počinju micati amo-tamo oko ravnotežnog položaja. Ove molekule pobude pak daljnji sloj zraka na titranje i na taj način početni titraji tijela prenose se od jednog sloja zraka na drugi i šire se zrakom od izvora na sve strane. Stvaraju se dakle kuglasti zvučni valovi. Oni su longitudinalni, jer čestice zraka titraju u smjeru širenja zvuka. Zbog toga dolazi do periodičkog zgušćenja i razređenja zraka, odnosno do poremećenja tlaka zraka. Na onim mjestima, gdje je kompresija ili zgušćenje zraka, tlak raste, a tamo gdje je dilatacija ili razređenje, tlak pada. Dakako, ove promjene tlaka su potpuno neznatne i mogu se primjetiti tek s veoma osjetljivim instrumentima, koji se zovu mikrobarografi. No, i ove male promjene tlaka djeluju na temperaturu zraka. Mjesta, gdje je tlak porastao imaju nešto višu temperaturu, a ona gdje je pao nešto nižu. Te temperature promjene su adiabatičke, jer nisu nastale dovođenjem topline iz okolnog zraka. Prema Laplaceu možemo brzinu zvuka u zraku ili u nekom drugom plinu, gdje se promjene odvijaju adiabatičkim putem, izračunati iz izraza:

$$v = \sqrt{k \frac{p}{\rho}} \quad \mathrm{m\,s^{-1}},$$

gdje je k omjer specifične topline zraka kod stalnog tlaka i specifične topline kod stalnog volumena t. j. $k = c_p/c_v$; p je tlak, a ϱ gustoća zraka. Iz te se formule vidi,

da je brzina za sve zvučne valove jednaka. To znači, da se i visoki i duboki tonovi šire istom brzinom.

Mjesto omjera tlaka i gustoće može se uzeti umnožak plinske konstante i temperature, kako nam to pokazuje tzv. plinska jednadžba:

$$\frac{p}{\rho} = RT,$$

tako da je brzina zvuka onda jednaka:

$$v = \sqrt{kRT} \ \mathrm{m\,s^{-1}},$$

ili ako se za k i R uvrste njihove vrijednosti u zraku t. j. $k = 1{,}403$ i $R = 2{,}87 \cdot 10^6$ $\mathrm{cm^2 s^{-2} stup^{-1}}$, može se jednostavnim množenjem i vađenjem drugog korijena lako pokazati, da se jednadžba za brzinu dade napisati u obliku:

$$v = 20{,}06 \sqrt{T} \ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Brzina zvuka u zraku ovisi dakle o temperaturi zraka. Što je temperatura viša i brzina je veća, i obratno kod niže temperature, zvuk se širi sporije. Kod praktičnog izračunavanja brzine temperatura se uzima u ^{0}C, a ne u Kelvinovim ili apsolutnim, kako je to u jednadžbi napisano. Treba dakle staviti:

$$T = 273 + t.$$

Uvrštavanjem toga u dobiveni izraz za brzinu izlazi:

$$v = 20{,}06 \sqrt{273 + t} = 331{,}4 \sqrt{1 + 0{,}004\, t} \ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Kad je temperatura na primjer 0^0 C za brzinu se okruglo dobiva 331 m, dakle nama dobro poznata vrijednost, koju nalazimo u svim udžbenicima.

Po Laplaceovoj se formuli može izračunavati brzina širenja samo onih zvukova, koji ne proizvode velike kompresije tlaka. No imamo li naročito jak zvuk, koji je na pr. proizveden nekom eksplozijom, onda bi brzinu širenja trebalo izračunavati po izrazu:

$$V = v \sqrt{1 + \frac{P}{p} \cdot \frac{k+1}{2k}} \ \mathrm{m\,s^{-1}},$$

t. j. po prijašnjoj formuli izračunatu brzinu trebalo bi pomnožiti nekim brojem većim od jedinice, koji se dobije kad riješimo izraz pod korijenom. Sve su nam oznake pod korijenom već poznate osim P, koji znači tlak na mjestu kompresije. Brzine takovih udarnih valova iznose i do 10 000 $\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Ovisnost brzine zvuka o temperaturi zraka imade velikih posljedica. Naime temperatura zraka se mijenja i to kako prostorno tako i vremenski. No prostorne promjene su pak drugačije u horizontalnom smjeru, a drugačije u vertikalnom. Idući u horizontalnom smjeru, te su promjene malene, dok se temperatura u prvih desetak km idući u vis naglo pada. Zbog toga će i brzina zvuka u većim visinama biti sve manja i manja. U istom vremenskom razmaku zvuk u horizontalnom smjeru doprijet će dalje, nego u vertikalnom i zato će zvučni valovi poprimati oblik elipsoida mjesto kugle.

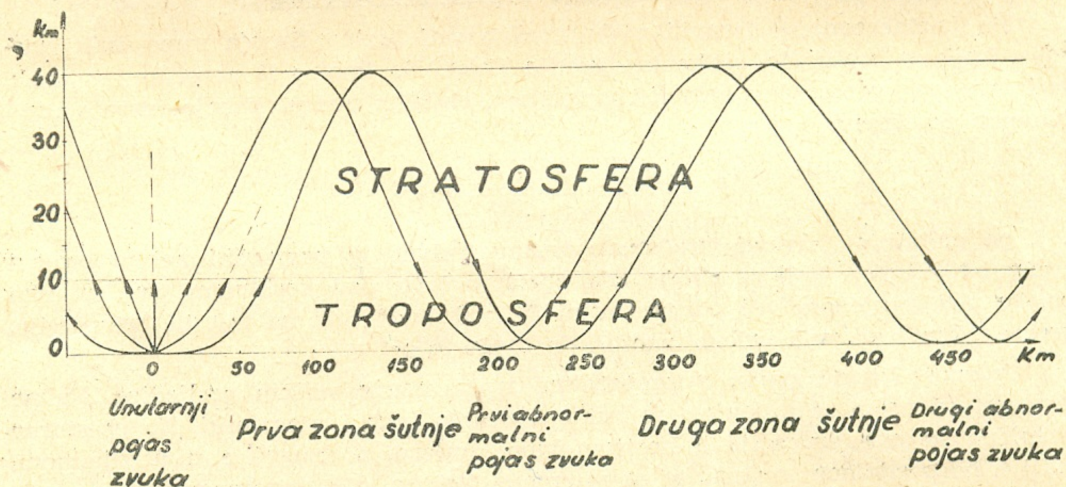
Ako napredovanje valova u određenom smjeru geometrijski prikažemo pravcima, koje možemo nazvati zrakama zvuka, onda će prema onome, što smo malo prije rekli, horizontalne zrake u jednakom vremenu prevaliti dulje puteve od vertikalnih. No pad temperature s visinom ne uzrokuje samo nejednakost širenja zvuka, nego također i zakrivljenost zraka zvuka. Što se zrake više udaljuju od izvora, one se sve više zakrivljuju prema gore. Na taj način prizemna zraka, koja je išla paralelno s tlom, nakon izvjesne udaljenosti od izvora počinje skretati prema gore i zvuk se u većim horizontalnim udaljenostima više ne čuje. Ono područje oko

izvora, u kojem se zvuk čuje, zovemo normalnim ili unutarnjim pojasom zvuka. Njegov polumjer obično iznosi 25—30 km. No, to ne znači da se zvuk u tom području mora uvijek čuti bez obzira na njegov početni intenzitet. Ako je naime već na izvoru zvuk slab, onda on ne može ni doprijeti u velike udaljenosti. Osim toga na cijelom području, na kojem se zvuk rasprostire, on se ne čuje jednako glasno. Energija i amplituda zvučnih valova tokom vremena slabe. Zato ćemo zvuk čuti sve slabije i slabije kako se od izvora udaljujemo u bilo kojem smjeru. Samo to slabljenje nije u svim smjerovima jednako. U horizontalnom smjeru energija opada s kvadratom udaljenosti, a u ostalim smjerovima t. j. koso i vertikalno prema gore energija se mijenja eksponencijalno s udaljenošću. Taj posljednji slučaj možemo prikazati slijedećom formulom:

$$E = E_0 e^{-\alpha D}$$

gdje je E_0 početna energija, e je baza prirodnih logaritama, α je koeficijent apsorpcije zvuka u zraku. Do opadanja energije dolazi zbog apsorpcije zvuka u atmosferi. Istraživanja su pokazala, da je apsorpcija to veća, što je niža temperatura i manja gustoća zraka. To znači, da će apsorpcija biti jača u višim slojevima zraka nego pri tlu. No, kod iste pak temperature i iste gustoće visoki tonovi su jače apsorbirani od niskih. Dakle duboki tonovi dopiru u nešto veću udaljenost od visokih tonova.

Zvuk, koji nastaje prilikom jakih eksplozija ima toliko početne energije, da se može od izvora proširiti do veoma velikih udaljenosti. On se čuje u cijelom normalnom pojasu zvuka, a dopire i u velike visine. Na svom putu on će slabiti zbog apsorpcije, ali ne će biti odmah sasvim apsorbiran. Zato se on nakon prolaska



Širenje zvuka kroz atmosferu

kroz najgušći sloj zraka od prvih desetak km debljine, koji je poznat pod imenom troposfera, širi i dalje u veće visine. No, u sloju atmosfere iznad troposfere pa dalje do oko 40 km prestaje opadanje temperature. To je tzv. stratosfera. U njoj je čak zabilježen i slabi porast temperature s visinom, a na njenoj gornjoj granici veoma nagli porast temperature. Zbog toga će se zrake prilikom prolaza kroz te slojeve, koji su sve topliji i topliji, prelamati na suprotnu stranu i zakretat će natrag prema površini Zemlje. Na taj način može zvuk, ako je dovoljno jak, ponovno doprijeti na tlo. Nastat će dakle nova zona ili novi pojas zvuka. On je poznat pod imenom I. abnormalni pojas zvuka. Taj pojas je odijeljen od unutrašnjeg pojasa zvuka jednom zonom, u kojoj se zvuk ne čuje. To je tzv. I. zona šutnje (vidi sliku).

Koji put se može dogoditi, ako je energija zvuka prilikom dolaska na tlo u I. abnormalnom pojasu, još dosta velika, da se zvuk reflektira na tlu i ponovno vrati u atmosferu. Prolazeći nanovo po drugi puta kroz troposferu i stratosferu, doprijet će na tlo i stvoriti II. abnormalni pojas zvuka. On je dakako u još većoj udaljenosti od izvora nego je to I. pojas, a od njega je odijeljen II. zonom šutnje, kako se to i naslici vidi. Oko izvora imamo dakle u takovim slučajevima koncentrično poredane pojase zvuka i pojase šutnje.

Proučavanjem tih pojasa, može se stvoriti predodžba o putu, kojim se zvuk širio. Iz zakrivljenosti putanje može se pak na indirektan način zaključiti, kakove su temperaturne promjene s visinom. Zato se u meteorologiji posvećuje posebna pažnja rasprostiranju zvuka u atmosferi, jer se tako dobivaju podaci o temperaturnim prilikama u visokim slojevima.

Diskusija rešenja jednačina prvog stepena sa jednim promenljivim parametrom

Dr. DANILO MIHNJEVIĆ, Zrenjanin

Svako rešenje jednačine prvog stepena koje sadrži u sebi promenljivi parametar može se diskutovati, prvo po egzistenciji: t. j. za koje vrednosti promenljivog parametra rešenja postoje, za koje vrednosti ne postoje, dalje za koje vrednosti parametra rešenja su neodređena. Zatim se diskusija može voditi i o znaku rešenja u zavisnosti od promene parametra, naime: kada će rešenja biti pozitivna, kada negativna, a kada neće imati znak. Dalje diskusija se može voditi o celobrojnosti rešenja: kada su rešenja celi brojevi, a kada su razlomci. Dalje kada će se rešenja nalaziti u unapred zadatom intervalu i to da li će u njemu biti monotono rastuća ili opadajuća i t. d.

Mi ćemo se u ovom članku ograničiti samo na diskusiju rešenja po egzistenciji i znaku. I pokazaćemo na primerima kako se može obraditi ova, za učenika, prilično teška partija.

I. Zadatak. Diskutovati egzistenciju i znak rešenja jednačine:

$$ax - 3 = 3a + 2x$$

gde je »a« realan parametar.

Rešenje: Pošto u datoj jednačini razdvojimo članove i svaku stranu rastavimo na faktore dobićemo:

$$(a-2)\,x = 3\,(a+1)$$

Da bismo došli do traženog rešenja ostaje nam sada da podelimo obe strane poslednje jednačine sa $(a-2)$. Međutim za $a=2$ izraz $a-2=0$, te zbog toga deljenje je nemoguće. Prema tome, u slučaju kada je $a=2$ data se jednačina ne može rešiti — ona nema rešenja za $a=2$.

Pretpostavimo li da je: $a \neq 2$ dobijamo rešenje date jednačine:

$$x = \frac{3\,(a+1)}{a-2}.$$

Da bismo ga diskutovali po znaku dovoljno je ispitati znak razlomka: $x = \frac{a+1}{a-2}$ (faktor 3 otpada, pošto je uvek pozitivan). Množeći ovaj razlomak sa $(a-2)^2$ svodimo pomenuto ispitivanje na ispitivanje znaka kvadratnog trinoma:

$$\frac{a+1}{a-2}(a-2)^2 = (a+1)(a-2) = a^2 - a - 2.$$

Pošto je koeficijent uz a^2 pozitivan, trinom će biti negativan u intervalu, a pozitivan van intervala.

Prema tome, $x < 0$ kad je $-1 < a < 2$
$x > 0$ kad je $a < -1; a > 2$.

Napominjemo da čitalac može doći do istog rezultata i rješavanjem nejednačine:

$$x = \frac{3(a+1)}{a-2} > 0, \text{ odnosno } x = \frac{3(a+1)}{a-2} < 0.$$

Celu diskusiju korisno je svesti u sledeću tablicu:

a	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
x	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	∞	$+$	$+$

Iz koje čitamo: 1) kad je: $-\infty < a < -1$, rešenje je pozitivno. 2) Kad je $a = -1$ $x = 0$ — rešenje nema znaka. 3) Kad se »a« menja od -1 do 2, rešenje je negativno. 4) Za $a = 2$ data jednačina nema rešenja. 5) Kad »a« raste od 2 do koliko god hoćemo velikog broja rešenje je opet pozitivno.

Uočimo sada jednačinu koja će imati sve vrste rešenja.

Zadatak: Diskutovati egzistenciju i znak rešenja jednačine:

$$m^3x - mx + m - 4 = m^3 - 4m^2 - 5m^2x + 5x$$

gde je »m« realan parametar

Rešenje:

$$m^3x - mx + 5m^2x - 5x = m^3 - 4m^2 - m + 4$$
$$mx(m^2 - 1) + 5x(m^2 - 1) = m^2(m - 4) - (m - 4)$$
$$x(m^2 - 1)(m + 5) = (m^2 - 1)(m - 4)$$
$$x = \frac{(m^2 - 1)(m - 4)}{(m^2 - 1)(m + 5)}.$$

Diskusija po egzistenciji rešenja: 1) Kad je $m = -5$ imenilac rešenja je nula, a brojilac je različit od nule. Delenje je nemoguće — data jednačina nema rešenja.

2) Kad je $m = \pm 1$, $x = \frac{0}{0}$ — rešenje je neodređeno.

3) Za $m \neq -5$ i $m \neq \pm 1$, posmatrana jednačina ima rešenje.

Diskusija po znaku: Za $m = \pm 1$, $x = \frac{0}{0}$. Ali je prava vrednost:

$$x = \frac{(m^2 - 1)(m - 4)}{(m^2 - 1)(m + 5)} = \frac{m - 4}{m + 5}.$$

Prema tome, za $m = 1$, $x = -\frac{1}{2}$, a za $m = -1$ $x = -\frac{5}{4}$, t. j. oba slučaja rešenja su negativna.

Dalje, pošto faktor $m^2 - 1$ ulazi u brojilac i imenilac rešenja u istom stepenu, njegov znak ne utiče na znak rešenja. Prema tome, dovoljno je ispitati znak razlomka: $x = \frac{m - 4}{m + 5}$.

Ovo ispitivanje svodimo na ispitivanje znaka kvadratnog trinoma:

$$\frac{m - 4}{m + 5}(m + 5)^2 = (m - 4)(m + 5).$$

Vidimo da je trinom negativan u intervalu, a pozitivan van njega.

Prema tome, $x < 0$ kad je $-5 < m < 4$
$x > 0$ kad je $m < -5; m > 4$.

(Do istog rezultata se može doći i rešavanjem nejednačina: $x = \frac{m - 4}{m + 5} \lessgtr 0$.

Celu diskusiju svodimo u tablicu:

m	$-\infty$		-5		-1		0		1		4		$+\infty$
x	$+$	$+$	∞	$-$	$\frac{0}{0}$	$-$	$-$	$-$	$\frac{0}{0}$	$-$	0	$+$	$+$

II. Pređimo sad na diskusiju rešenja sistema dve jednačine prvog stepena sa dve nepoznate.

$$(a+1)\,x+(a+1)\,y=7$$
$$(a+1)\,x-(a+1)\,y=2a-1$$

gde je »a« realan parametar.

Rešenje: Sabiranjem i oduzimanjem datih jednačina dobijemo traženo rešenje u obliku: $x=\frac{a+3}{a+1}$ i $y=\frac{4-a}{a+1}$.

Za $a=-1$ nema rešenja te je dati sistem nemoguć. Za $a \neq -1$ sistem ima rešenja t. j. saglasan je.

Da bismo diskutovali rešenja po znaku, ispitaćemo znake razlomaka:

$$x=\frac{a+3}{a+1} \quad \text{i} \quad y=\frac{4-a}{a+1}.$$

Ovo ispitavnje svodimo na ispitivanje znaka kvadratnih trinoma:

$$(a+3)\,(a+1)=a^2+4a+3 \quad i$$
$$(4-a)\,(a+1)=-a^2+3a+4.$$

Pošto je prvi trinom negativan u intervalu, a pozitivan van njega, sledi:

$$x<0 \text{ kad je } -3<a<-1$$
$$x>0 \text{ kad je } a<-3;\ a>-1$$

Pošto je drugi trinom negativan van intervala, a pozitivan u intervalu, sledi:

$$y<0 \text{ kad je } a<-1;\ a>4$$
$$y>0 \text{ kad je } -1<a<4.$$

Napominjemo, da do istog rezultata mogli bi se doći i rešavanjem odgovarajućih nejednačina: $x=\frac{a+3}{a+1} \gtreqless 0$ i $y=\frac{4-a}{a+1} \gtreqless 0$.

Rezultat diskusije je korisno svesti u sledeću tablicu:

a	$-\infty$		-3		-1		0		4		$+\infty$
x	$+$	$+$	0	$-$	∞	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
y	$-$	$-$	$-$	$-$	∞	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$

Iz tablice se čita: 1) Kad je $-\infty<a<-3$, $x>0$; $y<0$. 2) Kad je $a=-3$, $x=0$; $y<0$. 3) Ako je $-3<a<-1$, $x<0$; $y<0$. 4) Kad je $a=-1$ sistem nema rešenja. 5 Ako je $-1<a<4, x>0; y>0$. 6) Kad je $a=4$, $x>0$; $y=0$. 7) Ako je $a>4$, $x>0$; $y<0$.

Posmatrajmo sada sistem koji će imati sve vrste rešenja.

Zadatak. Diskutovati egzistenciju i znak rešenja sistema:

$$m^2\,x+y=3\,m$$
$$x+y=3$$

gde je »m« realan parametar.

Rešenje: Oduzimanje druge jednačine od prve dobijemo:

$$m^2\,x-x=3\,m-3$$

$$x\,(m^2-1)=3\,(m-1) \quad \text{ili} \quad x=\frac{3\,(m-1)}{m^2-1}.$$

Zamenimo li dobivenu vrednost od x u drugu jednačinu sistema imamo:

$$\frac{3(m-1)}{m^2-1} + y = 3, \quad y = 3 - \frac{3m-3}{m^2-1} = \frac{3m^2-3-3m+3}{m^2-1} = \frac{3m^2-3m}{m^2-1}$$

$$y = \frac{3m(m-1)}{m^2-1}.$$

Vidimo: 1) Da za $m = -1$ sistem je nemoguć, jer je tada imenilac $m^2 - 1 = 0$, dok brojioci: $3(m-1)$ i $3m(m-1)$ to nisu. 2) Za $m = 1$, $x = 1$, $x = \frac{0}{0}$; $y = \frac{0}{0}$ t. j sistem je neodređen i 3) Za $m \neq \pm 1$ dati sistem ima rešenja te je saglasan.

Da bismo izveli diskusiju po znaku, ispitajmo prvo znak od x i od y za $m = 1$:

$$x = \frac{3(m-1)}{m^2-1} = \frac{3}{m+1}, \quad y = \frac{3m(m-1)}{m^2-1} = \frac{3m}{m+1}.$$

Prema tome: za $m = 1$, $x = \frac{3}{2} > 0$ i $y = \frac{3}{2} > 0$.

Pošto znak binoma $m - 1$ ne utiče na znake od x i od y, dovoljno je ispitati znake razlomaka: $x = \frac{3}{m+1}$ i $y = \frac{3m}{m+1}$. Ovo ispitivanje vršimo na taj način što ispitujemo prvo znak binoma $m + 1$ i znak kvadratnog trinoma: $m(m+1)$.

Iz prvog sledi:

$$x < 0 \text{ za } m < -1$$
$$x > 0 \text{ za } m > -1$$

Iz drugog se dobije:

$$y < 0 \text{ kad je } -1 < m < 0$$
$$y > 0 \text{ kad je } m < -1;\ m > 0.$$

Rezultat diskusije svodimo u sledeću tablicu:

m	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x	$-$	$-$	∞	$+$		$+$	$\frac{0}{0}$	$+$	$+$
y	$+$	$+$	∞	$-$	0	$+$	$\frac{0}{0}$	$+$	$+$

Po sebi se razume da se na slični način može vršiti i diskusija rešenja za sistem od više jednačina.

Hoja

Nekaj kinematičnih zanimivosti

Ing. JANEZ STRNAD, Ljubljana

Hoja je tako vsakdanji pojav, da se nam ne zdi vredna pozornosti. Kadar pa po nerodnosti zadenemo z nogo v kamen, se zavemo, da se noga med hojo precej hitro giblje. Potem je samo še korak do vprašanja, kako se giblje noga med hojo.

To vprašanje si je iz podobnega nagiba postavil ameriški fizik R. M. Sutton, pisec znane knjige o fizikalnih poizkusih za demonstracijo. Po težkem izpahu členka na nogi je zopet shodil. Pri tem ga je v trenutku, ko je dvignil nogo s tal, zmeraj zabolel členek, čeprav tedaj ni stal na bolni nogi. To mu je dalo misliti. O svojih razglabljanjih je objavil članek v American Journal of Physics (letnik 23, stran 490, 1955). Postavimo si tudi mi to vprašanje, pri razmišljanju pa uberimo svoja pota.

Gibanje vseh delov človeškega telesa, ki sodelujejo pri hoji, je dokaj zapleteno. Približno sliko pa nam bo dal kar naslednji model: trup nadomestimo s togim telesom, nogi za z dvema togima vzvodoma brez mase. V težišče trupa P postavimo izhodišče težiščnega koordinatnega sistema (x', y'), ki se giblje skupaj s trupom. Mirujoči koordinatni sistem (x, y) pa fiksiramo na tleh (sl. 1). Če premeri človek pot s v času t in napravi pri tem n enakih dvojnih korakov, lahko izračunamo dolžino dvojnega koraka

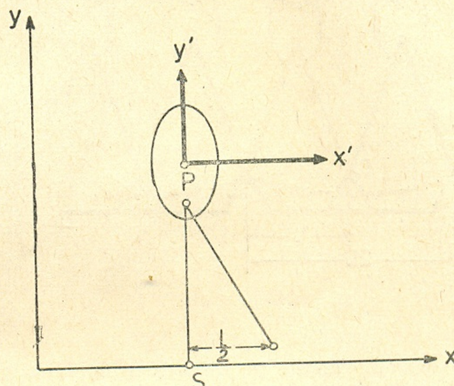
$$2L = s/n,$$

čas trajanja dvojnega koraka

$$T = t/n,$$

in še povprečno hitrost težišča

$$v_0 = s/t = 2L/T. \quad (1)$$



Sl. 1. Model s težiščnim (x', y') n mirujoćem (x, y) koordinatnim sistemom.

Da bomo mogli računati dalje, bo treba zanemariti še nekatere podrobnosti. Najprej privzemimo, da se težišče P giblje vodoravno in enakomerno s hitrostjo v_0. To ni popolnoma res saj vemo, da se težišče med hojo malenkostno ziblje gor in dol. Ker pa nam gre samo za gibanje nog, tega zibanja ne upoštevamo (dvojni korak je približno stokrat daljši, kot največji premik težišča v navpični smeri).

Zanima nas gibanje stopala S (drugo stopalo S^1 se giblje podobno) v vodoravni smeri. Ker smo nogo nadomestili s togim vzvodom, opiše S krivo pot. Mislimo si, da hodi naš model po količkih, ki so oddaljeni med seboj za dolžino koraka. Zato, da ni treba posnemati ljudem okorne hoje modela, imajo gležnje in kolena. Pri naših računih tudi pregibanje v gležnjih in kolenih ne bomo upoštevali.

Domnevajmo še, da se da gibanje noge v težiščnem sistemu opisati približno s sinusnim nihanjem. Študentje neke londonske medicinske šole delajo pri vajah poizkuse, ki potrjujejo približno veljanost te domneve. O tem poroča S. J. Wyard (American Journal of Physics, letnik 24, stran 568, 1956). Študentje dobe 1 m dolg železni vzvod, ki ga na enem koncu obesijo in mu izmerijo nihajni čas T_1. Nato ocenijo delo, ki je potrebno, da vzvod ohranijo v nihanju z nihajnim časom $2T_1$, T_1 in $\frac{1}{2}T_1$. Pozneje izmerijo še nihajni čas noge T_2 in ga primerjajo s T_1. Potem hodijo po laboratoriju s takšno hitrostjo, da traja dvojni korak približno $2T_2$, T_2 in $\frac{1}{2}T_2$ in ocenijo za to potrebno delo. Izmeriti nihajni čas noge ni lahko. Stoječ z eno nogo na stolu, je treba sprostiti mišice druge noge, tako da lahko le-ta prosto niha.

S slike (sl. 2) preberemo, da je pri našem modelu amplituda nihanja $\frac{1}{2}L$. Nihajni čas je T. Zato je (glej na pr. F. Kvaternik: Fizika za višje razrede srednjih šol, II. del, stran 90) odmik iz mirovne lege v težiščnem sistemu

$$x' = -\frac{1}{2}L\cos\omega t,$$

hitrost

$$v' = \frac{1}{2}\omega L\sin\omega t = \frac{1}{2}\pi v_0 \sin\omega t \quad (2)$$

in pospešek

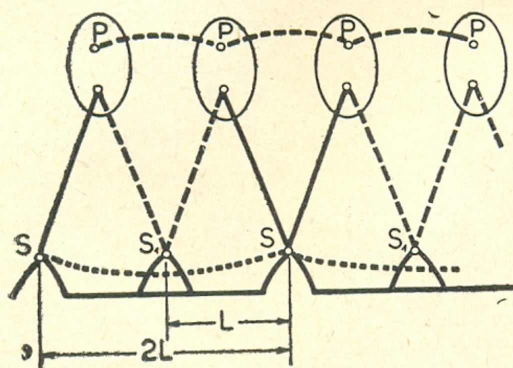
$$a' = \frac{1}{2}\,\omega^2 L \cos\omega t = (\pi^2 v_0/T)\cos\omega t\,,$$

pri čemer je ω krožilna frekvenca $\omega = 2\pi/T$. Hitrost ima največjo vrednost

$$v'_{max} = \frac{1}{2}\,\pi v_0\,,$$

pospešek pa

$$a'_{max} = \pi^2 v_0/T.$$



Sl. 2. Gibanje modela

To je veljalo za gibanje v težiščnem sistemu. Gibanje v mirujočem sistemu dobimo, če upoštevamo še enakomerno gibanje težišča:

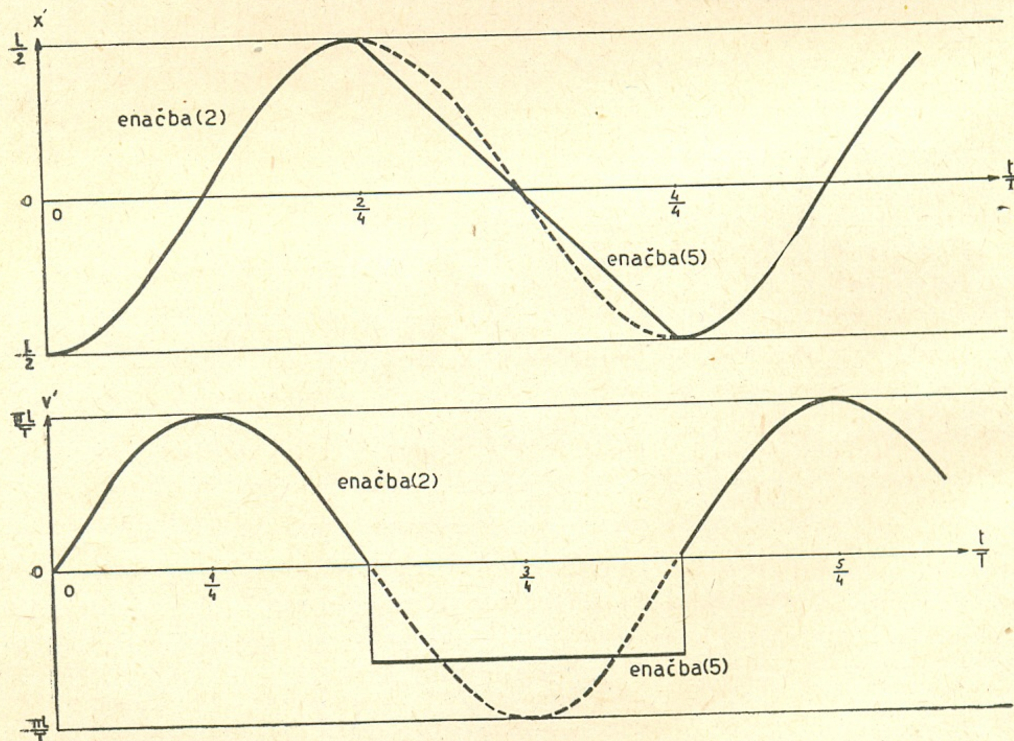
$$x = v_0 t + x' = L\left(2t/T - \frac{1}{2}\cos\omega t\right),$$

$$v = v_0 + v' = v_0\left(1 + \frac{1}{2}\pi\sin\omega t\right), \qquad (3)$$

$$a = a'.$$

Takšno gibanje zazna mirujoč opazovalec.

Dvojni korak je sestavljen iz dveh polovic. V prvi $\left(0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}T\right)$ stopalo prosto zaniha, v drugi $\left(\frac{1}{2}T \leqq t \leqq T\right)$ pa miruje na tleh (medtem ko se giblje druga



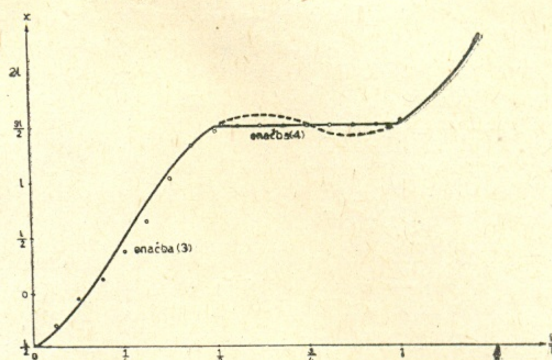
Sl. 3. Odmik od mirovne lege x' in hitrost v' stopala v težiščnem koordinatnem sistemu

noga). Izpeljane enačbe veljajo za prvo polovico dvojnega koraka. Za drugo polovico pa je

$$x = \frac{3}{2} L,$$
$$v = 0, \qquad (4)$$
$$a = 0.$$

Odtod lahko sklepamo na gibanje tega stopala v težiščnem sistemu, s tem da od (4) odštejemo vrednosti, ki ustrezajo enakomeremu gibanju težišča:

$$x' = \frac{3}{2} L - 2\,Lt/T,$$
$$v' = -2\,L/T, \qquad (5)$$
$$a' = 0.$$



Sl. 4. Odmik stopala od začetne lege v mirujočem koordinatnem sistemu. Vnešene točke smo dobili s filmskega traka. S filmsko kamero, ki dela 16 slik na sekundo, smo slikali gibanje belega znamenja na sredini čevlja. V našem primeru je trajal dvojni korak približno 1 s, njegova dolžina pa je bila 1,6 m. Tako dobimo: $v = 2L/T = 1{,}6$ m/s; $v'_{maks} = \frac{1}{2}\pi v_0 = 2{,}5$ m/s in $a'_{maks} = \pi^2 v_0/T = 16$ m/s².

Vse enačbe opisujejo periodično gibanje s periodo T. Pri tem veljajo za lihe polovice periode enačbe (2) in 3), za sode pa (4) in (5). V točkah, kjer začnejo veljati druge enačbe, preskoči hitrost. V tistih točkah je pospešek neskončen (sl. 3 i sl. 4). To nas ne sme zbegati, saj smo se dogovorili, da ima naš model noge z maso nič. Seveda imajo naše noge končno maso, tako da ostane pospešek končen. Da bi to vrednost pospeška lahko izračunali, pa bi potrebovali več podatkov.

Vendar lahko dobimo oceno za velikost pospeška, če si predstavljamo, da hodi model po zelo debeli elastični preprogi. Tedaj noga v težiščnem sistemu ves čas sinusno niha in med drugo polovico dvojnega koraka ne miruje na tleh. V tem primeru veljajo enačbe (2) in (3) za ves dvojni korak (črtkano na slikah 3 i 4) in je kar $a_{maks} = a'_{maks} = \pi^2 v_0/T$. To poenostavitev si je dovolil tudi Sutton, ki pa je računal z dvakrat večjo amplitudo, ker ni upošteval gibanja težišča. Zato je dobil dvakrat večjo vrednost za a_{maks}. Zlobnež bi lahko pripomnil, da ga je tako bolela noga dvakrat huje.

Značenje nekih riječi u hrv. srp. jeziku: čeprav — iako; čevelj — cipela; dokaj — prilično; domnevati — pretpostaviti; dovoliti — dopustiti; hoja — hodanje; huje — gore, lošije; izpah — iščašenje; količek — kolčić, nagib — razlog; nerodnost — nespretnost; odšteti — oduzeti; okoren — ukočen; podoben — sličan; posnemati — oponašati; precej — dosta; premik — pomak; preproga — sag, ćilim; primerjati — usporediti; pripomniti — primijetiti; saj — ali; sklepati — zaključiti; sod — paran; sprostiti — osloboditi; še — još; tog — ukočen, krut; ubrati — uzeti; upoštevati — uzeti u obzir; ustrezati — odgovarati; vaja — vježba; vendar — ipak; vprašanje — pitanje; vzvod — poluga; zavedati se, — biti svijestan, opaziti; zaznati — opaziti; zbegati — dovesti u nepriliku; zdeti — činiti se; zelo — vrlo; zlobnež — zlobnik; zmeraj — uvijek.

Kvadar u neodređenoj analizi

STJEPAN ŠKARICA, Zagreb

1. Ako su a, b i c mjerni brojevi kvadra, a d njegove dijagonale, onda je $a^2+b^2+c^2=d^2$. Tražiti, da a, b, c i d budu prirodni brojevi, znači tražiti rješenja neodređene jednadžbe $x^2+y^2+z^2=t^2$. Rješenje te jednadžbe je *osnovno*, ako su x, y, z, t relativno prosti brojevi, t. j. ako im je najveća zajednička mjera $= 1$. Iz svakog osnovnog rješenja (x_1, y_1, z_1, t_1) dobijemo beskonačno mnogo neosnovnih (kx_1, ky_1, kz_1, kt_1) za $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Iz jednadžbi: $3^2+4^2=5^2$, $5^2+12^2=13^2$ nalazimo odmah jedno osnovno rješenje gornje jednadžbe $3^2+4^2+12^2=13^2$; isto tako iz jednadžbi $8^2+15^2=17^2$ i $9^2+12^2=15^2$ dobivamo rješenje (8, 9, 12, 17), a iz $9^2+12^2=15^2$ i $15^2+20^2=25^2$ rješenje (9, 12, 20, 25).

Ako je dakle $r(k^2-l^2)=s(m^2+n^2)$, onda iz identiteta: $r^2(k^2-l^2)^2+r^2(2kl)^2=r^2(k^2+l^2)^2$ i $s^2(m^2-n^2)^2+s^2(2mn)^2=s^2(m^2+n^2)^2$ izlazi jednakost $s^2(m^2-n^2)^2+s^2(2mn)^2+r^2(2kl)^2=r^2(k^2+l^2)^2$. U posljednjem je primjeru $r=5$, $k=2$, $l=1$, $s=3$, $m=2$, $n=1$.

Kako na pr. iz $3^2+4^2+12^2=13^2$ izlazi: $13^2-12^2=3^2+4^2$, $13^2-4^2=3^2+12^2$, $13^2-3^2=4^2+12^2$, za $r=s=1$ iz gornje jednakosti dobivamo tri nova rješenja: (7, 24, 312, 313), (135, 72, 104, 185), (64, 48, 39, 89). Iz svakog dakle rješenja (a, b, c, d) neodr. jednadžbe $x^2+y^2+z^2=t^2$ dobivamo s pomoću gornje jednakosti, uzevši $r=s=1$, tri nova (osn.) rješenja.

2. Broj $(2k+1)^2+(2l)^2$ je neparan i oblika $4m+1$ pa je jednak razlici kvadrata $(2m+1)^2-(2m)^2$, gdje je $m=k^2+l^2+k$; odatle dobivamo identitet $(2k+1)^2+(2l)^2+[2(k^2+l^2+k)]^2=[2(k^2+l^2+k)+1]^2$. Na pr. $k=1$, $l=1$, $3^2+2^2+6^2=7^2$; $k=3$, $l=2$, $7^2+4^2+32^2=33^2$; $k=0$, $l=5$, $1^2+10^2+50^2=51^2$.

3. Ako lijevu stranu identiteta $(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$ pomnožimo s $4m^2n^2$, a desnu sa $(m^2+n^2)^2-(m^2-n^2)^2$, dobivamo identitet, što ga je dao Japanac *Matsunago*, $(m^4-n^4)^2+(4m^2n^2)^2+[2(m^2-n^2)mn]^2=(m^2+n^2)^4$. Na pr. $m=2$, $n=1$, $15^2+16^2+12^2=5^4$.

4. *a)* Ako je $a^2+b^2=c^2$, onda je $(2a-b)^2+[2(a+b)]^2+(2b-a)^2=(3c)^2$. Tako se dobiva identitet $[2(m^2-n^2-mn)]^2+[2(m^2-n^2+2mn)]^2+(4mn-m^2+n^2)^2=[3(m^2+n^2)]^2$. Na pr. $m=8$, $n=1$, $110^2+158^2+31^2=195^2$.

b) Uz isti uvjet $a^2+b^2=c^2$ je $(c-a)^2+(c-b)^2+(a+b-c)^2=(2c-a-b)^2$; odatle nam identitet $(2n^2)^2+(m-n)^4+[2n(m-n)]^2=(m^2+3n^2-2mn)^2$. Na pr. $m=8$, $n=1$; $2^2+7^4+14^2=51^2$.

5. Množenjem lijevih i desnih strana identiteta: $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$, $(c^2-d^2)^2+(2cd)^2=(c^2+d^2)^2$ dobivamo identitet $[(a^2+b^2)(c^2-d^2)]^2+[2cd(a^2-b^2)]^2+(4abcd)^2=[(a^2+b^2)(c^2+d^2)]^2$. Na pr. $a=2$, $b=1$, $c=4$, $d=3$; $35^2+72^2+96^2=125^2$.

Stavimo li $a=p$, $b=d=1$, $c=q$, posljednji identitet prelazi u *Euler*-ov $[(p^2+1)(q^2-1)]^2+[2q(p^2-1)]^2+(4pq)^2=[(p^2+1)(q^2+1)]^2$.

6. Ako obje strane poznatog identiteta $(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)=(\alpha\gamma\pm\beta\delta)^2+(\alpha\delta\mp\beta\gamma)^2$ pomnožimo s 4, izlazi identitet $(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)^2+[2(\alpha\gamma\pm\beta\delta)]^2+[2(\alpha\delta\mp\beta\gamma)]^2=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)^2$. Na pr. $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(1,2,3,5)$; $29^2+26^2+2^2=29^2+14^2+22^2=39^2$. Ako permutiramo brojeve 1, 2, 3, 5, dobivamo još četiri različite četvorke (19, 34, 2, 39), (19, 26, 22, 39), (13, 34, 14, 39), (1, 2, 2, 3). To je stoga, što od $1\cdot2\cdot3\cdot4=24$ permutacije elemenata $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ po 8 njih daju iste brojeve.

7. Dokazat ćemo, da identitet u točki 6. daje sva rješenja neodređene jednadžbe $x^2+y^2+z^2=t^2$.

Ako je četvorka (x, y, z, t) osnovna, onda x, y i z ne mogu biti sva tri parni brojevi. Uzmimo, da je samo jedan od njih, na pr. x, paran! Kako su onda y i z neparni, t mora biti paran broj, ali u tom slučaju ne može postojati jednadžba $y^2+z^2=t^2-x^2$, jer bi onda u jednadžbi $\frac{1}{2}(y^2+z^2)=\frac{1}{2}(t^2-x^2)$ lijeva strana bila neparan, a desna paran broj. Broj t ne može dakle biti paran, i stoga je od brojeva x, y i z jedan, na pr. x, neparan, a y i z su parni; y i z ne mogu biti neparni, jer i u ovom slučaju jednadžba $y^2+z^2=t^2-x^2$ ne može postojati s razloga, što joj je desna strana djeljiva s 4, a lijeva nije. U jednadžbi $y^2+z^2=(t+x)(t-x)$, gdje su t i x neparni, a y i z parni brojevi, oba su faktora na desnoj strani parni brojevi, a mora biti: $t+x=2(\alpha^2+\beta^2)$, $t-x=2(\gamma^2+\delta^2)$, jer je poznato, da suma kvadrata dvaju prirodnih brojeva sadržava samo faktore oblika r^2+s^2, koji se, ako su parni, mogu napisati u obliku $2(u^2+v^2)$. Iz posljednjih dviju jednadžbi izlazi $t=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$, $x=\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2$, $y^2+z^2=4(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)=[2(\alpha\gamma\pm\beta\delta)]^2+[2(\alpha\delta\mp\beta\gamma)]^2$.

Brojeve α,β,γ i δ možemo po volji odabrati; stoga neodređena jednadžba $x^2+y^2+z^2=t^2$ ima ∞^4 rješenja. Želimo li dobiti osnovno rješenje, brojevi α,β,γ i δ moraju biti rel. prosti, i to jedan neparan, a tri parni brojevi, ili obrnuto; taj je uvjet potreban, ali nije dovoljan; na pr. za $\alpha=1$, $\beta=5$, $\gamma=3$, $\delta=2$ izlazi neosnovno rješenje $13^2+26^2+26^2=39^2$.

8. Svi drugi identiteti, koji nijesu istovetni s identitetom u t. 6., samo su njegovi specijalni slučajevi i ne daju sva rješenja neodređene jednadžbe $x^2+y^2+z^2=t^2$.

Primjeri. *a)* Identitet u t. 2. dobije se iz identiteta u t. 6., ako se uzme: $\alpha = k + 1$, $\beta = l$, $\gamma = k$, $\delta = l$. Ne može dati sva rješenja, jer se samo dva od brojeva $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mogu slobodno izabrati zbog $\gamma = \alpha - 1$, $\delta = \beta$.

b) Da se dobije identitet Matsunaga (t. 3).), valja staviti $\alpha = m^2$, $\beta = mn$, $\gamma = mn$, $\delta = n^2$, a predznake u parnim članovima uzeti redom $-$ $+$. Ne daje sva rješenja zbog $\beta = \gamma = \sqrt{\alpha\delta}$.

c) Identitet u t. 4. a) dobije se, ako se stavi $\alpha = m + n$, $\beta = n$, $\gamma = m - n$, $\delta = m$, a predznaci u parnim članovima redom $-$ $+$, dok se identitet u t. 4. b) dobije za $\alpha = m - n$, $\beta = \gamma = n$, $\delta = 0$. Ni jedan od njih ne daje sva rješenja.

d) Identitet u t. 5. izlazi za $\alpha = ac$, $\beta = bc$, $\gamma = ad$, $\delta = bd$ i za red predznaka u parnim članovima $-$, $+$. Zbog $\alpha\delta = \beta\gamma$ po volji se mogu izabrati tri od brojeva $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, a u *Euler*-ovom identitetu, gdje je $\alpha = pq$, $\beta = q$, $\gamma = p$, $\delta = 1$ samo dva.

e) Identitet *Desboves*-a $4(p^2 + q^2 - s^2)^2 + 4[(p-1)^2 - q^2 + p(q-s)]^2 + [(q-s)^2 - p^2 + 4q(p-s)]^2 = \{3[(p-s)^2 + q^2] + 2s(p-q)\}^2$ dobije se iz identiteta u t. 6. za $\alpha = p$, $\beta = q - p + s$, $\gamma = q + p - s$, $\delta = q - s$ uz red predznaka u parnim članovima $+$, $-$. Ne daje sva rješenja, jer se od brojeva α, β, γ i δ mogu po volji uzeti tri zbog $\delta = \gamma - \alpha$.

f) *Catalan*-ov identitet $(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac)^2 = [(a + c)(a + b)]^2 + [(b + c)(a + b)]^2 + (c^2 + ac + bc - ab)^2$ izlazi za $\alpha = a + b + c$, $\beta = a$, $\gamma = b$, $\delta = c$ uz red predznaka u parnim članovima $+$, $-$, kad se tako dobiveni identitet razdijeli sa 4. Ne daje sva rješenja zbog $\alpha = \beta + \gamma + \delta$.

9. Pustimo iz vida geometrijsko značenje brojeva a, b, c i d, koji zadovoljavaju neodređenu jednadžbu $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$! Time otpada zahtjev, da ti brojevi budu prirodni, t. j. oni sada mogu biti cijeli pozitivni i negativni brojevi pa i nule.

Ako je $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$, onda je i $(\pm a)^2 + (\pm b)^2 + (\pm c)^2 = (\pm d)^2$, pa vidimo, da je svakim rješenjem spomenute jednadžbe određeno 16 različitih njezinih rješenja, ali istovetnih po apsolutnoj vrijednosti članova.

Neka je $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$! Iz $(p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 = (p + d)^2$ nalazimo $p = a + b + c + d$ i prema tome $(b + c + d)^2 + (a + c + d)^2 + (a + b + d)^2 = (a + b + c + 2d)^2$. Iz rješenja (a, b, c, d) dobivamo dakle rješenje $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, koje je s prvim vezano relacijama A i B:

$$A \begin{cases} \alpha = b + c + d \\ \beta = a + c + d \\ \gamma = a + b + d \\ \delta = a + b + c + 2d \end{cases} \qquad B \begin{cases} a = \beta + \gamma - \delta \\ b = \alpha + \gamma - \delta \\ c = \alpha + \beta - \delta \\ d = 2\delta - (\alpha + \beta + \gamma) \end{cases}$$

S pomoću jednadžbi A iz 16 četvorki $(\pm a, \pm b, \pm c, \pm d)$ dobit ćemo 8 rješenja jednadžbe $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$, koja se razlikuju po aps. vrijednosti članova, jer su u dva po dva rješenja članovi protivni brojevi; na pr. iz četvorke (a, b, c, d) dobije se četvorka $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, a iz četvorke $(-a, -b, -c, -d)$ četvorka $(-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta)$. Na pr. iz $(\pm 5, \pm 2, \pm 14, \pm 15)$ dobijemo iz A ovih 8 rješenja, uzetih pozitivno: (31, 34, 22, 51), (3, 6, 22, 23), (1, 4, 8, 9), (27, 24, 8, 37), (27, 34, 18, 47), (1, 6, 18, 19), (3, 4, 12, 13), (31, 24, 12, 41).

Ako je $a + b$ ili $a + c$ ili $b + c$ jednako d, po jedan član u dvije od onih 8 četvorki će biti $= 0$; na pr. iz četvorki $(1, 4, 8, -9)$ i $(-1, 4, -8, 9)$ dobiju se četvorke $(3, 0, -4, -5)$ i $(5, 0, 12, 13)$ a to su vrlo davno poznate trojke Pitagorinih brojeva.

Ako je $a + d = b + c$, ili $b + d = a + c$, ili $c + d = a + b$, među onih 8 četvorki bit će jedna opet (a, b, c, d), ako se ne obaziremo na predznake; na pr. iz $(2, -3, -6, 7)$ dobiva se četvorka $(-2, 3, 6, 7)$.

10. Dokazat ćemo, da se iz trivijalnog rješenja (1, 0, 0, 1) jednadžbe $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ mogu s pomoću jednadžbi A dobiti sva njezina rješenja.

Neka je $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ jedno takvo rješenje, i neka su α, β, γ i δ svi pozitivni! Iz jednadžbi B dobit ćemo novo rješenje (a, b, c, d), u kojemu je $0 < d < \delta$. Zbog $\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ je $\delta < \alpha + \beta + \gamma$, a iz $(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 > 0$ izlazi $2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) > 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma$ ili $3\delta^2 > (\alpha + \beta + \gamma)^2$, i stoga je pogotovo $2\delta > \alpha + \beta + \gamma$, ili $d = 2\delta - (\alpha + \beta + \gamma) > 0$, $\delta - d = \alpha + \beta + \gamma - \delta > 0$, t. j. $0 < d < \delta$. Ako sad u novoj četvorki (a, b, c, d) eventualne negativne članove zamijenimo pozitivnim pa je onda označimo s $(\alpha_1, \beta_1,$

γ_1, δ_1) s pomoću jednadžbi B dobit ćemo iz nje novu (a_1, b_1, c_1, d_1), gdje je opet $0 < d_1 < \delta_1$. Nastavimo li taj postupak, posljednja će četvorka nužno biti $(1, 0, 0, 1)$. Obrnemo li sad taj postupak, iz četvorke $(1, 0, 0, 1)$ dobit će se s pomoću jednadžbi A četvorka $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

Na pr. $\alpha = 35$, $\beta = 4$, $\gamma = 28$, $\delta = 45$; iz te četvorke s pomoću B dobivamo četvorku $(-13, 18, -6, 23)$; iz $(13, 18, 6, 23)$ četvorku $(1, -4, 8, 9)$; iz $(1, 4, 8, 9)$ izlazi $(3, 0, -4, 5)$, iz $(3, 0, 4, 5)$ dobije se $(-1, 2, -2, 3)$, a iz $(1, 2, 2, 3)$ napokon $(1, 0, 0, 1)$.

Obrnuto: S pomoću jednadžbi A iz $(1, 0, 0, 1)$ dobivamo $(1, 2, 2, 3)$; iz $(-1, 2, -2, 3)$ izlazi $(3, 0, 4, 5)$; iz $(3, 0, -4, 5)$ dobije se $(1, 4, 8, 9)$; iz $(1, -4, 8, 9)$ izađe $(13, 18, 6, 23)$, a iz $(-13, 18, -6, 23)$ napokon $(35, 4, 28, 45)$.

Tri zadatka o trapezu

STANKO PRVANOVIĆ, Beograd

Izložićemo rešenja tri konstruktivna zadatka koje učenici i studenti ili ne mogu rešiti ili rešavaju na vrlo zaobilazan, »neelegantan« način.

1. *U datu kružnu liniju upisati trapez kome je data visina a jednak je datom kvadratu*

1⁰ Neka je duž PQ stranica datog kvadrata, HH' data visina, a MN zbir paralelnih stranica trapeza. Tada se iz

$$\frac{HH'}{2} \times MN = PQ \times PQ$$

t. j. iz proporcije $\frac{HH'}{2} : PQ = PQ : MN$ konstruiše duž MN na poznati način.

Prema tome, zadatak se svodi na konstrukciju jednakokrakog trapeza upisanog u datoj kružnoj liniji, kad su mu dati zbir paralelnih stranica i visina.

Sl. 1.

Sl. 2.

2⁰ Neka je $ABCD$ (sl. 1.) traženi trapez. Povucimo OG kroz sredine njegovih paralelnih stranica a EF i KL paralelno tim stranicama pri čemu je E sredina luka AD a K sredina stranice AD. Tada je $KL = \frac{1}{4}(AB+CD) = \frac{1}{4}MN$ i, prema tome, poznata duž. Isto tako poznata je i duž GL (jer je jednaka polovini visine), pa, dakle, i GK (kao hipotenuza $\triangle KLG$).

Kako su lukovi AE i CF jednaki, to su jednaki i lukovi ADC i EDF. Iz toga sledi $AC = EF$, a samim tim i $EM = GK$ (jer je $EM = \frac{1}{2}EF$, a $KG = \frac{1}{2}AC$ kao srednja linija $\triangle ACD$).

3⁰ Odatle sledi ova konstrukcija:

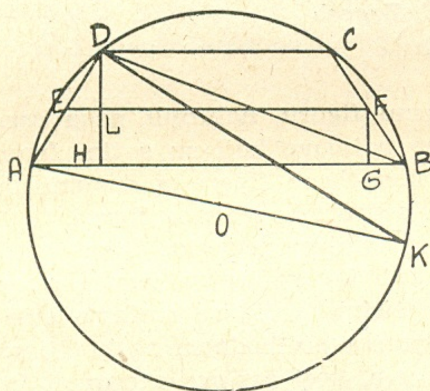
Paralelno proizvoljnom prečniku RS date kružne linije (sl. 2.) povući dve prave: jednu na otstojanju GK, drugu na otstojanju KL. Neka prva prava seče kružnu liniju u E, a druga neka seče EO u K. Kroz tačku K povući pravu normalu na EO. Ona seče kružnu liniju u A i D. AD je jedna neparalelna stranica traženog trapeza. — Dovrši konstrukciju!

2. *U datu kružnu liniju upisati trapez kad su poznati zbir paralelnih stranica i krak*

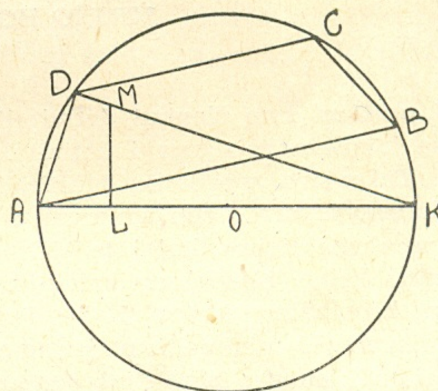
Neka je $ABCD$ (sl. 3.) traženi trapez, DH njegova visina a BD dijagonala. Očigledno je da je duž HB jednaka poluzbiru neparalelnih stranica, jer je $\triangle DLE \cong \triangle FGB$.

Ugao AKD je poznat, jer je pravougli trougao ADK poznat. Samim tim poznat je i ugao ABD (jer zahvata isti luk AD), pa, dakle, i $\triangle ABD$.

Otuda ova konstrukcija trapeza (sl. 4.):



Sl. 3.



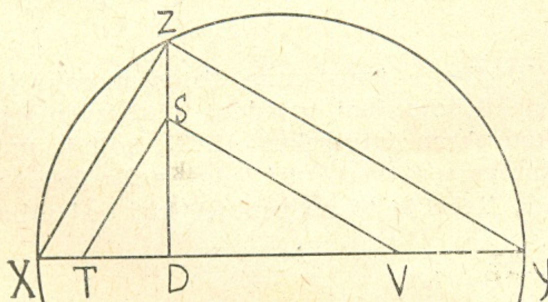
Sl. 4.

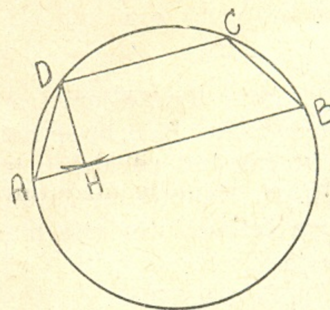
Otseći tetivu AD jednaku datom kraku. Odmeriti duž KL jednaku datom poluzbiru paralelnih stranica i kroz L povući normalu na AK. Ona seče KD u M, pa je KM jednaka dijagonali BD. Zato je dovoljno oko D, kao oko centra, opisati kružnu liniju poluprečnikom KM. Njen presek B s datom kružnom linijom pretstavlja treće teme traženog trapeza.

3. *Dati su kvadrat, duž i kružna linija. Upisati trapez jednak datom kvadratu a čiji je krak jednak datoj duži*

Neka je (sl. 3.) $ABCD$ traženi trapez, DH njegova visina. Prema prethodnom zadatku DK je poznata duž. Kako su trougli BHD i KDA slični, imamo:

$$DH : HB = AD : DK$$





Sl. 5.

što znači da treba konstruisati duži DH i HB kad znamo njihovu razmeru i njihov proizvod, pretstavljen datim kvadratom čija stranica neka je PQ.

Te dve duži mogu se konstruisati ovako:

Konstruiše se $\triangle ADK$ (sl. 3. ili 4.). Povuče se (sl. 5.) duž $XY = AD + DK$ i nad njom, kao nad prečnikom, konstruiše se polukružna linija. U D (pri čemu je $XD = AD$) podigne se normala (na XY) koja seče polukružnu liniju u Z. Odmeri se $DS = PQ$ (stranici datog kvadrata) i povuku se ST i SV (respektivno) paralelno dužima ZX i ZY. Tada su DT i DV tražene duži DH i HB. (Zašto?)

Posle toga konstrukcija trapeza je jednostavna: Odmeri se tetiva AD jednaka datom kraku. Oko D, kao centra, opiše se kružna linija poluprečnikom DT, a iz A povuče se tangenta na tu kružnu liniju. Ta tangenta daje, u preseku sa kružnom linijom, treće teme trapeza.

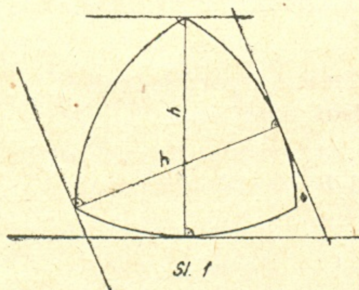
Figure konstantne širine

KREŠO HORVATIĆ, Zagreb

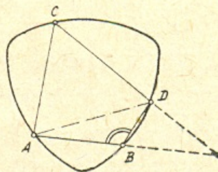
I.

U prošlom smo članku[1] definirali konveksnu figuru, nabrojili neka osnovna svojstva konveksnih figura i definirali izvjesne pojmove koji su s tim figurama u vezi. Tako smo specijalno definirali širinu konveksne figure u danom smjeru kao udaljenost para s tim smjerom paralelnim potpornih pravaca figure.

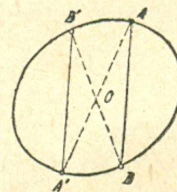
Konveksna figura, kojoj je širina u svakom smjeru jednaka, zove se figura konstantne širine. Konveksnu krivulju, koja je rub takove figure, zvat ćemo onda krivulja konstantne širine. Kako konstantnu širinu h figure možemo smatrati maksimalnom (ili minimalnom) širinom bit će prema prethodnom svaki dijametar figure okomit na par paralelnih potpornih pravaca, koji prolaze njegovim krajevima i svi će dijametri biti po duljini jednaki konstantnoj širini figure h. (Sl. 1). Figure konstantne širine su dakle ujedno i figure konstantne duljine dijametra i obratno. Iz prije rečenog slijedi također, da su svi potporni pravci figure konstantne širine regularni. Jasno je nadalje, da udaljenost bilo kojih dviju točaka figure konstantne širine ne može premašiti širinu h te figure.



Sl. 1



Sl. 2



Sl. 3

Bilo koja dva dijametra $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ figure konstantne širine moraju imati zajedničku točku. Kad bi se naime oni sjekli produženi, u jednoj točki izvan figure, ili kad bi čak bili paralelni, imali bi konveksan četverokut $ABCD$, koji je upisan figuri (Sl. 2). Kako je međutim suma kutova u četverokutu jednaka 2π, bar jedan od kutova četverokuta nije manji od $\pi/2$. Neka je to na primjer kut kod vrha B. No tada je

$$\overline{AD} > \overline{AB} = h$$

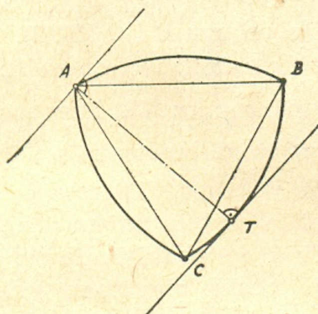
[1] Ovaj je članak nastavak članka „Konveksne figure" izašlog u br. 1. i 2. 1958.-59. Matem.-fiz. lista.

što je nemoguće. Znači, dva se dijametra uvijek sijeku u unutrašnjoj ili rubnoj točki figure. Ako se sijeku u nekoj rubnoj točki T, onda je ta točka singularna točka ruba. Pravci, koji prolaze tom točkom, a okomiti su na dijametre, jesu naime potporni pravci figure, odakle slijedi, da je točka T stvarno sigularna.

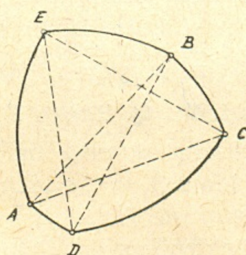
Najjednostavnija figura konstantne širine je dakako krug. Širina je jednaka njegovom dijametru. Krug je jedina centralno simetrična figura konstantne širine. Jer, ako je figura konstatne širine centralno simetrična, svi njezini dijametri moraju prolaziti centrom simetrije O. Kad bi, naime, postojao dijametar $\overline{AB}$, koji ne prolazi točkom O, zbog simetričnosti bi morao postojati i dijametar $\overline{B'A'}$ i ta bi dva dijametra bila paralelna. (Sl. 3). A to je, kako smo dokazali, nemoguće. Prema tome, svi dijametri prolaze kroz O. Nadalje, zbog centralne simetrije točka O raspolavlja svaki dijametar, dakle figura je krug.

Prvi je Euler našao, da osim kruga ima i drugih figura konstatne širine. Ako na primjer uzmemo vrhove A, B i C istostranog trokuta stranice a, kao središta triju kružnica polumjera a, onda će lukovi $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ i $\overset{\frown}{CA}$ tih triju kružnica omeđiti jednu figuru konstantne širine (Sl. 4). Odaberimo naime na jednom od tih lukova na primjer na $\overset{\frown}{BC}$, bilo koju točku T. Tangenta u toj točki na kružni luk $\overset{\frown}{BC}$ je potporni pravac figure. Kako je međutim tangenta okomita na polumjer, bit će A i T par dijametralnih točaka. Budući da je nadalje $\overline{AT} = a$, a zaključak vrijedi i za točke na $\overset{\frown}{CA}$ i $\overset{\frown}{AB}$, figura je stvarno konstantne širine $h = a$. Naravno, točke A, B i C su singularne točke rube figure. Ova se figura zove Reuleaux-ov trokut (ili trostran).

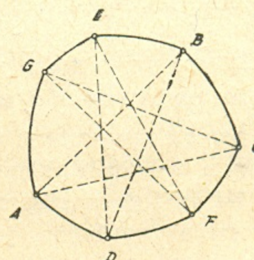
Poopćenje ovog postupka dovodi nas do tako zvanih Reuleaux-poligona, t. j. »poligona«, kojima su stranice kružni lukovi. Evo kako teče takav postupak: Odaberimo u ravnini točku A, pa oko A kao središta opišimo bilo kakav luk $\overset{\frown}{BC}$



Sl. 4



Sl. 5



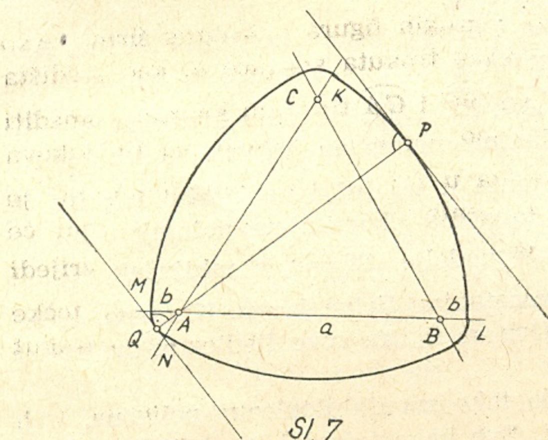
Sl. 6

kružnice polumjera a. Opišimo zatim oko B kružnicu polumjera a (Sl. 5). Kružnica sigurno prolazi točkom A, jer je prema prethodnoj konstrukciji $\overline{AB} = a$. Odabrat ćemo na toj kružnici neku točku D. Postupak možemo nastaviti dalje, ali ako ga želimo završiti, opisat ćemo luk oko C kroz točku A i luk oko D kroz točku B. Ta će se dva luka presjeći u nekoj točki E. Kako je $\overline{EC} = \overline{AC} = a$ i $\overline{ED} = \overline{BD} = \overline{BA} = a$, to kružnica polumjera a sa središtem u E prolazi točkama C i D, i mi smo na taj način figuru zatvorili. Dobili smo jedan Reuleaux-ov peterokut $ADCBE$. Analogno bi konstruirali sedmerokut (Sl. 6), deveterokut i t. d. Svakom je »vrhu« (A, B, C...) takovog poligona nasuprot kružni luk, »stranica« poligona. Nadalje svaka točka neke stranice i suprotni vrh čine par dijametralnih točaka i njihova je udaljenost jednaka čvrstom broju a, polumjeru kružnih lukova. Reuleaux-ov je poligon dakle

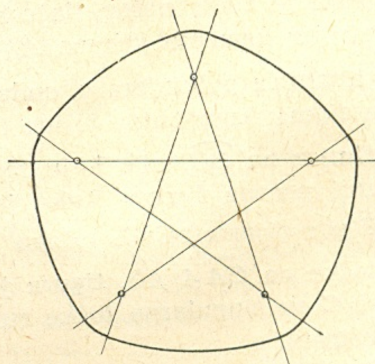
figura konstantne širine. Njegovi su vrhovi singularne točke ruba. Stranice Reuleaux poligona mogu, ali naravno općenito ne moraju biti jednake. Lako se može uvidjeti, da poligoni dobiveni navedenom konstrukcijom imaju uvijek neparan broj strana.

Sve dosada promatrane figure konstantne širine, izuzev krug, imale su na svom rubu singularnih točaka i konstruirane su iz kružnih lukova, čiji je polumjer jednak širini figure. Može se dokazati potpuno općenito: ako neka figura konstantne širine h ima na svom rubu singularnu točku, onda na rubu figure postoji luk kružnice polumjera h, i obratno.

Mogu se međutim konstruirati i figure konstantne širine bez singularnih, ugaonih točaka na rubu. Prema definiciji takova će figura biti oval, dakle oval konstantne širine. Evo jednog primjera: Dani su istostraničan trokut ABC sa



Sl. 7


Sl. 8

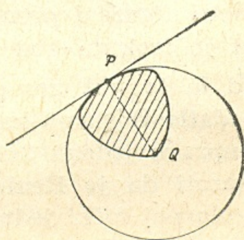
stranicom a i neka dužina b. Opisat ćemo oko vrha A kao središta luk $\widehat{KL}$ polumjera $a+b$ te luk $\widehat{MN}$ polumjera b, i zatim isto takove lukove oko vrhova B i C (Sl. 7). Ovi će lukovi omeđiti jednu figuru konstantne širine i to bez singularnih točaka na rubu. U to se možemo lako uvjeriti. Neka je naime P bilo koja točka luka $\widehat{KL}$. Pravac PA sijeći će onda luk $\widehat{MN}$ u nekoj točki Q. Točke P i Q čine par dijametralnih točaka ruba, jer su tangente u tim točkama okomite na $\overline{PQ}$, dakle paralelne. Dijametar $\overline{PQ}$ je jednak $a+2b$. Zaključak bi bio isti, da se točka P nalazila na bilo kojem drugom luku, pa je figura stvarno konstantne širine $h=a+2b$. Vidi se nadalje, da su sve točke ruba regularne, jer je pridruživanje dijametralnih točaka obostrano jednoznačno. Taj se postupak može poopćiti tako, da se umjesto trokuta uzme pravilni zvjezdasti mnogokut,[2] pa se oko svakog njegovog vrha opisuju kružni lukovi polumjera $a+b$ i b. Rezultat je opet jedna figura konstantne širine $h=a+2b$ bez singularnih točaka. Mnogokut čak ne mora biti pravilan, dovoljno je da bude istostraničan. Na sl. 8. je na primjer figura konstruirana oko pravilnog zvjezdastog peterokuta. Sve figure konstatne širine, koje smo konstruirali, imaju zajedničku karakteristiku da su omeđene kružnim lukovima. Moglo bi se zato pomisliti, da će tako biti uvijek. Postoji, međutim, niz drugih, složenijih postupaka, koji nam omogućuju dobivanje figura konstantne širine bez ijednog kružnog luka na rubu.

Nabrojit ćemo neka svojstva figure konstantne širine. Na primjer, svakom rubnom točkom figure konstatne širine h prolazi kružnica polumjera h, koja obuhvaća čitavu figuru. Da bi to dokazali, izabrat ćemo na rubu figure konstantne širine bilo koju točku P (Sl. 9). Njoj dijametralna neka je točka Q. Kako je dija-

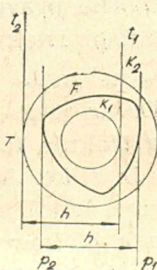
[2] Pod zvjezdatim mnogokutom ovdje ćemo razumijevati samo mnogokut, koji se dobije, ako se uzme $n+1$ točka u cikličkom poretku, pa se svaka točka spaja sa n-tom točkom u tom poretku.

metar $\overline{PQ}$ jednak h, to će kružnica polumjera h sa središtem u točki Q prolaziti točkom P. Ta kružnica sigurno obuhvaća cijelu figuru, jer kad bi postojala neka točka T figure izvan kružnice, bilo bi $\overline{TQ} > h$, što je nemoguće. Tangenta na kružnicu u točki P je naravno i potporni pravac figure. U vezi sa kružnicom može se dokazati i ovo svojstvo figura konstantne širine: Ako neka kružnica ima s rubom figure konstantne širine h bar tri točke zajedničke, onda njezin polumjer nije veći od h. Na primjer stranice kod Reuleaux poligona pripadaju takovim kružnicama polumjera h.

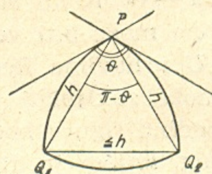
Pod kružnicom figuri opisanom razumijevat ćemo najmanju od kružnica, koje obuhvaćaju tu figuru. Slično, figuri upisana kružnica je najveća od kružnica, koje su sadržane u toj figuri. Može se strogo dokazati, da za svaku konveksnu



Sl. 9



Sl 10



Sl. 11

figuru postoji opisana i upisana kružnica. Dok je opisana kružnica uvijek samo jedna, upisanih može biti više, čak beskonačno mnogo (na primjer kod pravokutnika). Kod figura konstatne širine opisana i upisana kružnica su koncentrične i suma njihovih polumjera je jednaka širini figure. To ćemo dokazati. Prije svega, ako su K_1 i K_2 dvije koncentrične kružnice, kojih je suma polumjera $r_1 + r_2 = h$, pa je kružnica K_1 sadržana u figuri konstantne širine h, onda kružnica K_2 tu figuru obuhvaća (Sl. 10). Neka je naime T bilo koja točka kružnice K_2. Povući ćemo redom tangentu t_2 kružnice K_2 u točki T, zatim onu tangentu t_1 kružnice K_1, koja je paralelna sa t_2 (od dviju mogućih onu, koja je od t_2 udaljenija) i konačno par p_1, p_2 pa s tim tangentama paralelnih potpornih pravaca figure. Tada je udaljenost tangenata t_1 i t_2 jednaka h, a jer je figura konstantne širine, i udaljenost potpornih pravaca p_1 i p_2 je jednaka h. Tangenta t_1 sigurno pripada pruzi p_1p_2, jer je u toj pruzi smještena čitava figura, pa prema tome i kružnica K_1, koja je u figuri sadržana. Kad bi i tangenta t_2 bila unutar pruge p_1p_2, bila bi udaljenost između tangenata t_1 i t_2 manja od h, a to je nemoguće. Znači, točka T ne može biti unutrašnja točka figure, pa je čitava figura smještena u krugu K_2, kako smo tvrdili. Obratno, ako od dviju koncentričnih kružnica, kojih je suma polumjera $R_1 + R_2 = h$, jedna obuhvaća figuru konstantne širine, druga će kružnica biti u toj figuri sadržana. Dokaz bi tekao analogno. Neka je sada r polumjer figuri upisane kružnice K_u, a R polumjer opisane kružnice K_o, onda ne može biti

$$r + R > h,$$

jer bi tada, prema upravo dokazanom postojala kružnica, koncentrična sa kružnicom K_u, koja obuhvaća figuru i kojoj je polumjer manji od R, što nije moguće. Međutim, ne može biti ni $r + R < h$,

jer bi u tom slučaju mogli konstruirati kružnicu, koncentričnu sa kružnicom K_o i smještenu u figuri, koja bi imala polumjer veći od r, što je i opet nemoguće. Preostaje onda kao jedina mogućnost, da je

$$r + R = h.$$

Nadalje, kružnice K_u i K_o moraju biti koncentrične, jer bi u protivnom mogli konstruirati i kružnicu $\overline{K}_o$ koncentričnu sa K_u i polumjera R, koja bi obuhvaćala figuru, pa bi postojale dvije kružnice K_o i $\overline{K}_o$ opisane figuri, a to je nemoguće. Kod kruga se naravno upisana i opisana kružnica podudaraju $r = R = h/2$. Može se dokazati, da od svih figura konstantne širine h Reuleaux-ov trokut ima najveći polumjer R opisane kružnice, a time i najmanji polumjer r upisane kružnice.

Pod kutom konveksne figure u nekoj rubnoj točki smatrat ćemo najmanji kut, kojem je vrh u toj točki, a koji sadrži cijelu figuru. U regularnim točkama ruba taj je kut uvijek π, dok je u singularnim točkama manji od π. Dokazat ćemo, da kut u singularnoj točki figure konstantne širine nije manji od $2\pi/3$. Neka je P singularna točka figure konstantne širine h. (Sl. 11). Krakovi najmanjeg kuta Θ, kojemu je vrh u P, a koji sadrži figuru, jesu naravno potporni pravci figure. Tetive $\overline{PQ_1}$ i $\overline{PQ_2}$, okomite na te potporne pravce, su dijametri figure i prema tome jednake h. Trokut PQ_1Q_2 je zbog toga istokračan, a kut je trokuta kod vrha P jednak $\pi - \Theta$. Kako stranica $\overline{Q_1Q_2}$ ne može biti veća od h, to kut nasuprot toj stranici ne može biti veći od $\pi/3$. Dakle je $\pi - \Theta \leqq \pi/3$ i odatle $\Theta \geqq 2\pi/3$ kako smo tvrdili. U vrhovima Reuleaux-ovog trokuta taj je kut Θ upravo jednak $2\pi/3$, kako se to može zaključiti neposredno iz slike. Može se pokazati da je Reuleaux-ov trokut jedina figura konstantne širine, kojoj je kut u singularnoj točki jednak $2\pi/3$.

Krug, kojem je dijametar jenak h. ima opseg $h\pi$. Opseg Reuleaux-ovog trokuta širine h je $3 \cdot \pi/3\ h$, dakle $h\pi$. Opseg bilo kojeg Reuleaux poligona je $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha)\ h$, dakle opet $h\pi$, jer je suma unutrašnjih kutova u zvjezdastom mnogokutu jednaka π.[3] Kod našeg najjednostavnijeg primjera ovala konstantne širine je opseg

$$3\,[(a + b)\,\pi/3 + b\,\pi/3] = (a + 2b)\,\pi = h\pi$$

a analogno bi se vidjelo, da je opseg i kod ostalih ovala konstatne širine jednak $h\pi$. To nas upućuje na pomisao, da možda sve figure iste konstantne širine h imaju isti opseg $h\pi$. Stvarno, može se pokazati i sasvim općenito (Barbier), da je opseg svake figure konstantne širine h jednak $h\pi$, dakle da sve figure iste konstantne širine imaju isti opseg. To je osnovno svojstvo figura konstatne širine. Za dokaz te činjenice bilo bi međutim potrebno strogo fundirati pojam duljine neke zatvorene krivulje, a to bi premašilo opseg i svrhu ovoga članka.

(Svršit će se)

Sjećanja u vezi s proslavom 40-godišnjice KPJ i SKOJ-a

Bilo je to prije više od četvrt vijeka

FRANJO HRABAK, Zagreb

Ujesen 1930. vladalo je na zagrebačkom Sveučilištu relativno političko mrtvilo. Takvo stanje bilo je odraz nesređenih prilika u KPJ i političke neorijentiranosti studenata.

U mirni odnosno jednostrano uzbudljiv građanski život studenata, pa i studenata matematike i fizike, postepeno se unosi politički nemir. Događaji u svijetu (talijanski fažizam kao stvarnost, Hitlerov nacional-socijalizam na pomolu) i Aleksandrova diktatura u zemlji, aktiviziranje naprednih snaga među studentima zagrebačkog sveučilišta — sve to ne mimoilazi ni studente matematike i fizike. Politička pitanja sve više su predmet razgovora i diskusija, što utječe na političko opredje-

[3] Kako je iz konstrukcije jasno, u svaki je Reuleaux poligon upisan jedan istostranični zvjezdasti mnogokut.

ljenje većeg broja studenata. Režimske organizacije JAČ (Jugoslavenska akademska čitaonica) i JAK (Jugoslavenski akademski klub) uživaju niz privilegija (stipendije, popusti na željeznici, menza i dr.), ali ne postaju iole značajniji faktor, osim što su denuncirali studente. Opozicione organizacije: HSS, frankovci, samostalni demokrati i dr. uglavnom su kolebljivi, neodlučni. Frakcijske borbe u KPJ i boravak CK izvan zemlje također ne pridonose mogućoj afirmaciji komunista na Sveučilištu, ipak, 1932. godine počinje sve organiziraniji rad, najprije KOSTUFRA (Komunistička studentska frakcija), a kasnije SKOJ. Rad je duboko ilegalan po principu ćelija.

Na Filozofskom fakultetu, u čijem sastavu je tada bio matematičko-fizički odsjek, postoji 1932. već organizacija, koja rukovodi ćelijama na nekim odsjecima filozofskog fakulteta. Za matematiku i fiziku bio je zadužen Grga Gamulin. On se prema ranijem dogovoru sastajao u određeno vrijeme na nenapadnom mjestu sa mnom kao rukovodiocem ćelije matematičara i fizičara. Na sastanku je rukovodilac ćelije dobivao određene zadatke u pogledu dalje akcije (dijeljenje letaka, pripreme za štrajkove, razrada literature i dr.), materijal koji se štampao u zemlji ili bi došao od CK (tada je bio u Beču), te bi izvještavao o izvršenom radu ćelije. Nitko u ćeliji nije znao tko je veza, čime smo se osigurali od policijske provale. Prije nego što bismo nekog primili u ćeliju moralo je biti neosporno utvrđeno, da čvrsto stoji na marksističkim pozicijama, da je politički-moralno i karakterno čvrst, nepokolebljiv i da se dobro držao u pojedinim akcijama. Na sastancima ćelije (svaki put na drugom mjestu) proučavao se organizaciono-politički i teorijski materijal (dijalektički i historijski materijalizam, politička ekonomija i djela klasika marksizma), zatim se razgovaralo o općem političkom stanju među studentima matematike i fizike kao i na Sveučilištu, te stvarale pripadne odluke. S mnogima smo sate i sate pojedinačno razgovarali, bez obzira na to bili oni frankovci, klerikalci, HSS-ovci. Jedino s JAČ-evcima nismo trošili vrijeme, jer smo ih smatrali nedostojnim.

Naša ćelija formirana je negdje ujesen 1932., njeni članovi bili su Bogdan Ogrizović, Radovan Reichherzer, Josip Brečević, Stanko Borković i potpisani.[1]

Aktivnost naše grupe i pojačano političko kretanje na Sveučilištu očitovali su se i u tome što smo kasnije formirali još jednu ćeliju, kojom je rukovodio Josip Brečević. Njen član bio je i Ivo Vrančić.

Početkom novembra 1932. formirano je inicijativom studenata komunista SUS (Središnje udruženje studenata), čije su organiziranje pripomogle opozicione grupacije na Sveučilištu, a učlanili su se i stručni klubovi. Tako je stvorena mogućnost da studentska omladina organizirano nastupa i sudjeluje u političkim akcijama. Na akcije nije trebalo mnogo čekati: 19. novembra priređen je miting u vezi sa štrajkom glađu političkih zatvorenika u Srem. Mitrovici, 30. novembra upućena je predstavka rektoru u vezi sa smještajem siromašnih studenata u Studentski dom i raspodjele stipendija. Ovdje su jačevci htjeli, uz potporu policije, da imaju glavnu riječ. Akcije se nastavljaju, a podstiču ih i mjere, koje želi da provede protunarodni režim. Tako se sredinom siječnja 1933. održava sjednica SUS-a, na kojoj se prima protestni memorandum rektoru, kojim se traži ukidanje ispitnih taksa i školarine i protestira protiv pokušaja režima da ukine zagrebački Tehnički fakultet. Memorandum je predao pok. dr. Josip Kajfeš,[2] *tada potpredsjednik SUS-a rektoru u prisustvu delegacije studenata. Na pitanje Kajfeša da li je rektoru više stalo do onoga što traži protunarodni režim ili do toga što odgovara interesima hrvatskog naroda, rektor je odgovorio, da on najprije želi da izvrši ono što mu vlast naredi, zatim da odgovara pred svojom savjesti i na kraju da ne zaboravlja narod iz kojeg*

[1] Ogrizovića (V. gimnazija u Zagrebu nosi njegovo ime) i Reichherzera objesili su ustaše 1943. u Zagrebačkoj Dubravi. Borković je stradao nesretnim slučajem prije rata.

[2] Poginuo u NOB-i; bolnica u ul. P. Miškine u Zagrebu nosi njegovo ime.

je nikao. Tek kad smo izašli iz rektorata pogledali smo se i konstatirali, da smo »prevedeni žedni preko vode«.

Uzbuđenje raste, rektor putuje u Beograd, demonstracije se nastavljaju. Ovaj put se jako osjeća kolebanje frankovaca i klerikalaca, pa komunisti organiziraju sami 24. I. nove demonstracije. O dvostrukoj igri frankovaca i klerikalaca javio je i »Proleter« od siječnja 1933.

Vladajući režim shvatio je svu ozbiljnost studentskih nemira i činjenicu, da su komunisti organizatori i rukovodioci akcije. Zbog toga Ministarstvo prosvjete početkom veljače 1933. ukida SUS, kao legalnog nosioca otpora. Ovo nije moglo spriječiti uzavrelu aktivnost studenata. Opozicione grupe se pripremaju na nove akcije: 20 stručnih klubova, zatim »Matija Gubec« i »Štrosmajer« proglašuju početkom ljetnog semestra generalni štrajk neupisivanjem zbog zavođenja školarine i pokušaja da se ukine Tehnički fakultet u Zagrebu. Ovaj štrajk »prihvatili« su frankovci i klerikalci.

Odluku u ime većine studenata trebalo je i ostvariti. Radi toga je odlučeno, da Sveučilište čuvamo i spriječimo svaki upis. I doista, točno u 8 sati našli smo se u glavnoj zgradi, zabarikadirali glavni ulaz pomoću klupa oslonjenih jedna na drugu, prva na ulazna vrata, posljednja na suprotni zid. Svaki je imao pozamašnu drvenu palicu za slučaj sukoba. Ove palice dao je izraditi Leo Mates kod jednog stolara. Nešto poslije 8 sati došao je kroz prozor rukovodilac klerikalne grupe s Pravnog fakulteta, ali kako nije našao nikoga od svojih (na sastanku uoči štrajka obećao je 10 ljudi), vratio se istim putem; naravno, više ga toga dana nismo vidjeli. Kad su jačevci saznali da smo zabarikadirali Sveučilište, uspjelo im je zbog neopreznosti jednog podvornika, da kroz donja vrata prodru u podrum. Zametnula se bitka na stepenicama, koja vode iz podruma prema prizemlju— oni s pucnjima iz pištolja, mi s klupama i s drvom za gorivo. Morali smo ustuknuti, ali njihova pozadina — policija učinila je svoje. Ne mogavši drugačije, propuzali su se policajci po žljebovima za vodu pozadine zgrade i tako nas iznenadili. Predvodio ih je tadašnji šef bezbednosti Dragi Jovanović (za vrijeme rata šef specijalne policije u Beogradu), uputio nas je u dvoranu za promocije i održao proračunati govor, prema kojem je i on u mladosti bio komunist. Obećao je, da se ne će nikom ništa dogoditi, ako se u miru raziđemo. To dakako nije sprečavalo njegove ljude, da na izlazu iz zgrade po volji hapse studente i da ih u »crnoj Marici« voze u policiju na specijalno saslušanje. Bio je tada uhapšen i Žarko Vimpulšek, govornik na početku štrajka. Jedan od rezultata ovog štrajka bila je odgoda upisa za 7 dana.

U svim akcijama učestvovali su i studenti matematike i fizike čas u manjem, čas u većem broju. I to je bio jedan od načina da se provjeri praktična čvrstina pojedinca. U školskoj 1932./33. godini uspjelo je na više fakulteta da komunisti preuzmu rukovodstvo stručnih klubova, dobivši većinu glasova na godišnjim skupštinama. I klub studenata matematike i fizike doživio je taj uspjeh. Za predsjednika izabran je pok. Bogdan Ogrizović, za tajnika potpisani. Sastanci dobili su sada novi sadržaj: od formalističkih i usko stručnih problema prešlo se na idejno osvjetljavanje naučnih dostignuća, a nerijetko su se održavali izrazito politička predavanja. Tada je već bila dostupna razna napredna literatura, kao što je Komunistički manifest, Dijalektički materijalizam od Thalheimera, Anti-Dühring, Dijalektika prirode, razne edicije i dr.

Ovakav idejno-politički rad markantan je i za ostale stručne klubove toga perioda, a začet je godinu dana ranije u Sociološkom klubu (sastanci su se držali u predavaoni Geografskog instituta) i u Klubu brđana (stariji skauti, pretežno studenti), koji je mijenjao svoje mjesto sastanka. Jedan i drugi klub zabranjeni su 1932. godine.

U toku ove školske godine supotpisali smo nekoliko letaka uperenih protiv režima te frankovaca i klerikalaca, kao razbijača opozicionog jedinstva. Nije stoga čudno, što su se slijedeći izbori rukovodstva kluba (1933./34.) odvijali u znaku složnog gnjeva udružene studentske reakcije: režimskih jačevaca, klerikalca i frankovaca i što smo s nekoliko glasova manje izgubili rukovodstvo Kluba. Naš utjecaj na studente nije prestao, što više: češće su dijeljeni leci, a naročita poslastica bila je u aprilu 1934. godine, kada smo u okviru jedinstvene akcije na Sveučilištu podijelili prvi broj KSB (Komunistički studentski bilten) u klupe za koje će čas kasnije sjesti studenti matematike i fizike. Dva dana poslije ove akcije bio sam uhapšen i odsjedio mjesec dana pod sumnjom da se kod mene našao materijal za drugi broj KSB. Policija ipak nije saznala, da sam organizirao dijeljenje prvog broja KSB.

Bilo bi pogrešno misliti da je naš rad bio lagan i jednostavan. Pri tome ne mislim na opasnosti, kojima smo se izlagali, već na shvaćanje ljudi s kojima smo svakodnevno radili i pokušavali na njih djelovati. Konzervativan odgoj u kući i školi, utjecaj crkve, sve je to formiralo javno mišljenje. Prilično gusto je bilo posijano mišljenje, da je komunist identičan s razbojnikom ili pokvarenjakom. Pokrajina iz koje smo došli u Zagreb zgražavala se nad nama. »Tako dobar dečko, pa ode u komuniste« i slične izjave bile su prilično česte. Kad bismo u pojedinačnoj diskusiji iznijeli argumente, kojima subesjednik ne bi mogao parirati, znao bi onda rezignirano reći »Ja ipak želim ostati dobar katolik«. Shvaćanje, upijeno konzervativnim odgojem, bilo je jače od zaključaka, do kojih se dolazilo logičkim ili dijalektičkim putem. U sredini, gdje je izrazito dominiralo građansko konzervativno shvaćanje, te strah pred bogom, nije bilo lako sagledati zakonitost razvitka prirodi i društvu, makar pojedinac i listao marksističku literaturu. Izjava, kojoj bi se danas svaki srednjoškolac smijao, bila je tada normalna pojava: Kad je dosadilo jednom studentu što ga češće diram zbog njegovog religioznog fanatizma, uputio mi je pred širim krugom kritiku da ga neopravdano osuđujem zbog njegove neliberalnosti. Na moje pitanje u kojim se granicama kreće njegov liberalizam, odgovorio je s ponosom: »U okviru dogmi katoličke crkve«. Kad smo s pojedincima otvorenije razgovarali, dobivali smo i ovakve odgovore: jedan nema vremena, jer mora instruirati, drugi reče da želi biti neutralan, treći priznaje ispravnost linije, ali »gdje je to još . . .«, misleći na daljinu do svrgavanja kapitalizma.

Mnogi sati i dani utrošeni na razgovore s pojedincima, napetost živaca u vezi s hapšenjem i pretresima stanova, evidentiranje u policijskoj kartoteci komunista — sve je to nužno moralo prethoditi velikim danima Oslobođenja. S pijetetom se sjećamo boraca, bivših studenata matematike i fizike, koji su pali za slobodu: Ogrizovića, Reichherzera, Mihovilića i drugih. Oni su upili prve ideje marksizma-lenjinizma za vrijeme studija matematike i fizike, a ponosni smo i na to, da djelovanje na široki krug studenata nije bilo uzaludno: ni jedan među njima nije se našao u redovima ustaša. Kad sam se sreo lipnja 1941. s jednom frankovcem iz vremena studija i pitao ga kako se osjeća, sada kada su njegovi ideali realizirani, odgovorio mi je odlučno, da s ustašama nema i ne želi da ima ma kakve veze. Bilo je to 1941. godine! Jedan klerikalac iz vremena studija, kojem su silom htjeli ustaše dati važne položaje, niti se makao iz svoga mjesta, niti je primio ma kakvu višu dužnost od svoje redovite kao profesor.

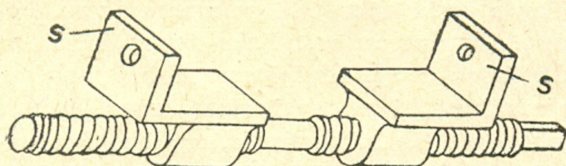
U danas tako izmijenjem okolnostima, kada napredna literatura više nije zabranjena, kada su naučne spoznaje na dohvatu svakom omladincu, vrijedno je baciti pogled unazad i sagledati mučni put kojim se do ovog došlo. I ne samo sagledati taj put, nego izvesti i pripadne lične zaključke.

IZ MOJE RADIONICE I LABORATORIJA

Gradnja lučne svjetiljke u đačkoj radionici

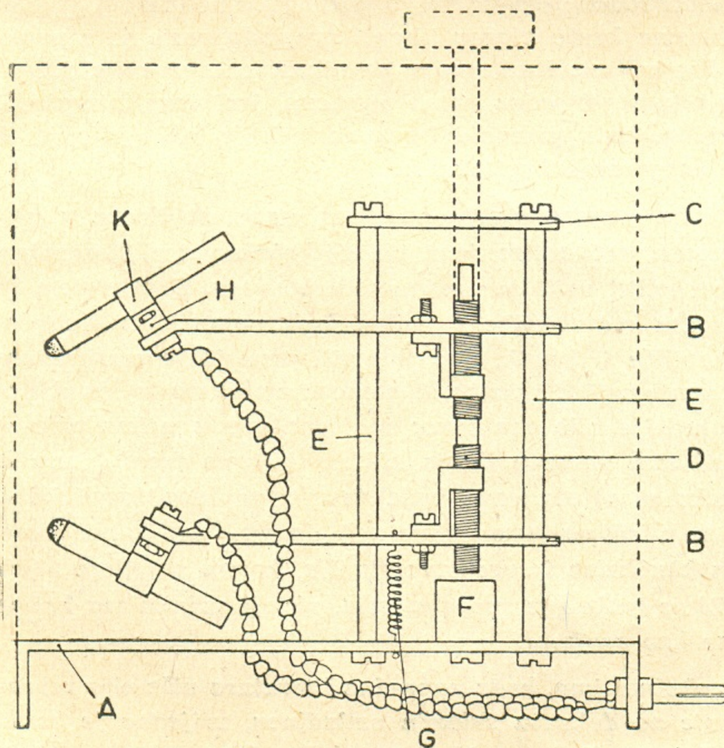
Konstrukcija lučne svjetiljke, koju predlažemo, ne zahtijeva naročiti materijal ni kompliciranu obradu pojedinoih dijelova. Veći se dio materijala može nabaviti uz niske cijene, jer u obzir dolaze i otpaci, koje možemo često nabaviti u klubovima »Narodne Tehnike«.

Uglavnom su dva glavna problema, koja moramo riješiti kod konstruiranja i izrade lučne svjetiljke. Prvi problem sastoji se u pomicanju ugljena, jer se lučna svjetiljka pali tako da se ugljeni dotaknu i zatim polagano razmaknu; osim toga u toku rada ugljene elektrode se pomalo troše pa je potrebno s vremena na vrijeme približiti elektrode, da se luk ne ugasi. Drugi problem je električna izolacija uređaja, koja mora zadovoljavati propisima sigurnosti rukovanja električnim aparatima, a nalazi se stalno na visokoj temperaturi.



Sl. 1.

Da bi izbjegli kompliciranost uređaja za reguliranje luka predlažemo slijedeću konstrukciju, koja daje dobre rezultate uz minimalne troškove. Ideja se sastoji u tome, da se za primicanje i razmicanje ugljenih elektroda iskoriste stezaljke, kojima se sklizaljke ili koturaljke učvršćuju na cipele. Takva se stezaljka sastoji od (sl. 1) osovine, na kojoj je narezan navoj i to na polovicu osovine desni navoj, a na polovicu lijevi navoj. Osovina nosi matice, na koje su učvršćeni stezači *S*. Okretanjem osovine na jednu ili drugu stranu stezači se udaljavaju ili približuju jedan drugome. Naša je zamisao u tome da na stezače učvrstimo ugljene elektrode i tako riješimo reguliranje luka jednostavnim okretanjem osovine.

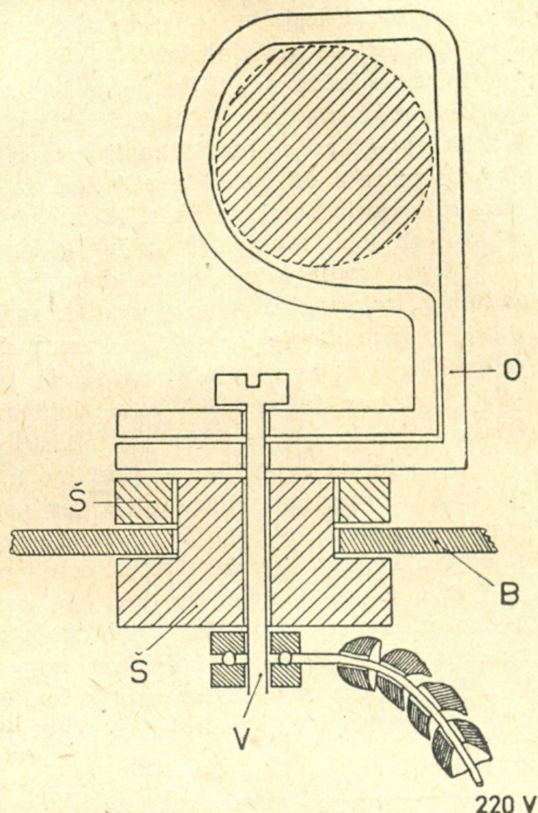


Sl. 2.

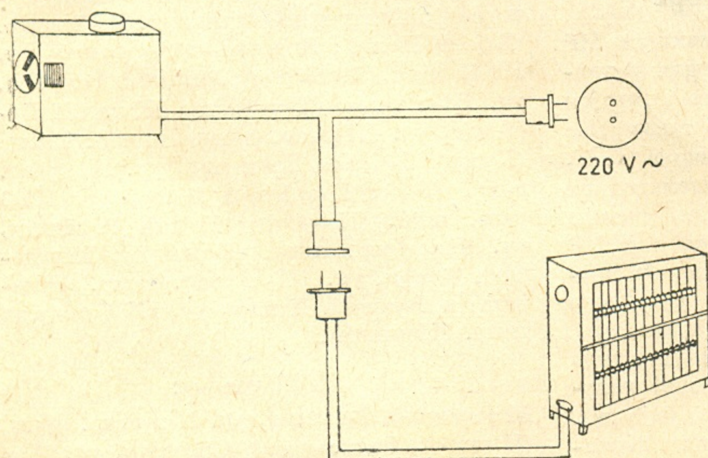
S jednim starih odbačenih klizaljki skinuli smo stezaljku, kojom se prednji dio cipele učvršćuje na klizaljku i to zato, jer ta stezaljka ima duži vijak od stezaljke, kojom se učvršćuje peta cipele. Budući da je kod većine stezaljki kraj, koji zahvaća cipelu, malo kos, potrebno ga je prethodno izravnati i to tako da ga malo užarimo na plameniku i ispravimo u škripcu. Nakon toga

probušimo na označenom mjestu rupu od 3—4 mm, tako da gotov komad izgleda kao na sl. 1. Kako dalje upotrebljavamo taj komad, vidi se najbolje sa sl. 2.

Dio *A* služi kao šasija i na njemu učvršćujemo ostale dijelove. Dijelovi *B* i *C* su trake izrezane iz lima široke oko 30 mm, i dovoljno debele, da se ne savijaju. Dijelovi *B* se pomoću zavrtnja pričvršćuju na stezaje, ali tako da je promjer zavrtnja manji od promjera rupa na dijelu *B* i stezaču. To je potrebno radi toga, da stezač može istodobno povlačiti dio *B* gore dole i činiti male horizontalne pomake uslijed toga što je osovina malo savinuta, što je obično slučaj. Šipke *E* su okruglog prosjeka i služe kao vodilice po kojima klize nosači ugljena *B*. To je potrebno zato da bi ugljeni svojim vrhovima dolazili uvijek točno jedan iznad drugog. Osovina je poduprta podupiračem *F*, koji se za *A* učvršćuje na prikladan način. Spiralno pero *G* djeluje tako, da je osovina uvijek naslonjena na podupirač. Osovina je produžena jednom šipkom, koja na gornjem kraju treba da viri iz kutije, u koju se stavlja lučna svjetiljka i na taj kraj se stavlja gumb od radio aparata ili nešto slično, tako da se osovina može lako okretati prstima. Zakretanjem osovine ugljeni se približuju ili udaraju prema potrebi Ugljeni se montiraju na krajeve dijelova *B*. Ugljeni međusobno treba da čine kut oko 90 stupanja. Oni su električno izolirani od *B* i na tu izolaciju postavlja se zahtjev da bude električno i termički sigurna. To je naročito osjetljivo mjesto i jedan način pričvršćivanja vidi se sa sl. 3 koja nije proporcionalna nego je naročito istaknut šamotni izolator *Š*. Takvi se izolatori upotrebljavaju za električne peći za grijanje ili za električna glačala, jer se pomoću njih u metal učvršćuju priključne žice za dovod struje. Takovi se šamotni izolatori dobivaju u trgovinama elektromaterijala i stoje nekoliko dinara. Takav se šamotni izolator sastoji od dva dijela, koji pristaju jedan u drugog a između njih dolazi lim, od kojeg želimo izolirati. Ta se dva dijela pritežu zavrtnjem, koji ujedno nosi obujmicu *O*, u koju je



Sl. 3.



Sl. 4.

pritegnuta ugljena elektroda. Na donji kraj vijka *V* pričvršćena je dovodna žica, kojom dovodimo struju. Ta je žica izolirana šamotnim »perlama« i vodi do priključnica na šasiji, koje su u šasiju učvršćene također šamotnim izolatorima kako se to radi kod električnih glačala.

Čitava lučna svjetiljka se može staviti u limenu kutiju, koja mora biti snabdijevena otvorima za ventilaciju jer se inače lučna svjetiljka suviše zagrijava. Na kučište je potrebno staviti mali prozor, kroz koji promatramo luk dali dobro gori. Prozor se radi od počađenog listića tinjca pokrivenog drugim listićem tinjca da se kod rukovanja ne skida čađa. Mjesto tinjca može se staviti počađeno ili jako tamno staklo, ali jako tanko, jer od jakog zagrijavanja staklo obično pukne.

Šema spoja lučne lampe dana je na sl. 4. O snazi priključnog potrošača (u našem primjeru električna peć) ovisi snaga luka, jer je otpor luka gotovo nula tako, da je jačine struje koja teče lukom dana uglavnom otpornom serijski spojenog potrošača. Luk je stabilniji, kada teče jača struja. Kada serijski sa lukom spojimo električnu peć jačine 2400 vata, dobivamo izvanredno jak i stabilan luk. Ako je struja premala, luk se teško pali i često se gasi.

Ako lučnu svjetiljku upotrebimo kao projekcionu lampu, onda moramo paziti da leće ne stavljamo blizu luka, jer nam mogu puknuti. Dobro je prvo pred luk staviti kivetu sa vodom, koja apsorbira infracrveno zračenje. Poslije kivete može se staviti kondenzore, film, leće i ostali pribor.

Ovo je samo sugestija, kako se može napraviti dobra i jednostavna lučnica. Svaka radionica treba da izvede konstrukciju prema svojim mogućnostima i da uvede sva eventualna poboljšanja, koja se u danoj radionici mogu načiniti. Osim toga još jednom naglašavamo, da je kod čitavog posla najvažnija besprijekorna električna izolacija uređaja, koja će onemogućiti bilo kakovu nezgodu kod rukovanja.

V. G.

ZANIMLJIVOSTI I RAZNO

Наградно такмичење ученика гимназија и средњих стручних школа НР Црне Горе

Друштво математичара и физичара НР Црне Горе у заједници са Заводом за унапређење школства организовало је крајем 1958/59 школске год. наградно такмичење ученика гимназија и средњих школа (I, II, и III разреда) у решавању математичких задатака. У такмичењу су узеле учешћа скоро све средње школе са територија НР Црне Горе. Свега је учествовало 64 ученика. Такмичење се одржало 7 јуна 1959 године истовремено у свим школама.

Истичемо, да је такмичење оваквог типа први пут сада спроведено у нашој републици. Одазив ученика није био најбољи. Ово такмичење је било финалног карактера, пошто Друштво из оправданих разлога није успјело на вријеме да организује претходна квалификациона такмичења. Такмичења оваквог типа имаче убудуће сигурно масовнији карактер и више успјеха у Црној Гори.

Новчаним наградама у распону од једне до три хиљаде динара награђено је 14 ученика, и то:

За III разред:

Андријашевић Ратко, уч. III-а гимн. (Титоград); Шестовић Благоје, уч. III-2 гимн. (Бијело Поље); Драгојевић Драгомир, уч. III-В гимн. (Титоград); Милачић Радмила, уч. III-в гимн. (Титоград); Желалић Василије, уч. III разр. средње помор. школе (Котор); Бијелић Владимир, уч. III разр. гимн. (Бар); Павићевић Вјера, уч. III-3 разр. гимн. (Никшић); Ћирић Рлободан, уч. III-4 разр. гимн. (Никшић); Карадаглић Ђорђе, уч. III-4 разр. гимн. (Никшић) и Радоњић Душан, уч. III-6 разреда гимн. (Никшић).

За II разред:

Мартиновић Велимир, уч. II-в разр. гимн. (Цетиње); Радусиновић Светозар, уч. II-в разр. гимн. (Цетиње); Урошевић Петар, уч. II разр. средње помор. школе (Котор).

За I разред:

Стојовић Мироје, уч. I-д разр. гимн. Титоград).

Најбољи успјех на овом такмичењу показали су ученици III разреда, а најслабији ученици I разреда.

Задаци на такмичењу били су следећи:

I разред

1. Упростити израз:

$$\frac{\dfrac{z-1}{3z+(z-1)^2}-\dfrac{1-3z+z^2}{z^3-1}-\dfrac{1}{z-1}}{\dfrac{1-2z+z^2-2z^3}{1+2z+z^2+2z^3}}.$$

2. Наћи рачунски и конструктивно катете правоуглог троугла чија је хипотенуза $2\sqrt{2}$ а један оштар угао 15°.

II разред

1. Дата је једначина другог степена

$$(a+2)\,x^2-2ax-a=0.$$

а) Испитати за које вредности a су коријени реални и какви су им знаци;

б) Одредити a тако, да коријени буду симетрични с обзиром на тачку $x=-1$;

в) Израчунати вредности a, за које једначина има двоструки коријен и наћи тај коријен;

г) Формирати квадратну једначину чији су коријени за вредност a под тачком б)

$$z_1=x_1/x_2;\quad z_2=x_2/x_1.$$

2. Наћи полупречник описане лопте око правилног тетраедра ивице 1.

III разред

1. Ријешити систем једначина:

$$10^{3-\log(x-y)}=250$$

$$\sqrt{x-y}+\frac{1}{2}\sqrt{x+y}=\frac{26-y}{\sqrt{x-y}}.$$

2. Доказати за правоугли троугао однос

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}>\frac{2ab}{c^2}.$$

(Послужити се односом

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}>\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}$$

т. ј. да је аритметичка средина два броја већа од њихове геометријске средине, ако је $\alpha\neq\beta$).

Израда писменог задатка трајала је 60 мин.

Момчило Космајац, проф. Цетиње

„Plava” optika

Kada razgovaramo o fotografskim aparatima često čujemo pitanje: »Da li ima plavu optiku?« Pri tome mislimo na purpurno-plavičastu boju kojom se odlikuju leće na svim modernim optičkim instrumentima. Svrha ovog članka je da objasni porijeklo i namjenu tako obrađenih leća.

Dobar fotografski aparat treba da nam omogući snimanje ne samo po sunčanom vremenu, nego i onda kada osvjetljenje nije tako povoljno. Stoga moramo nastojati da u aparat uđe što više svijetla. Količina svjetla koja ulazi ovisna je u prvom redu o otvoru objektiva (promjeru ulazne leće), tako da dobre kamere imaju relativno velik otvor. Međutim ne možemo povećati leću po volji, jer što je veći otvor, to se teže uklanjaju pogreške optičkog sistema i slika nije više vjerna.

Zato se prišlo uklanjanju drugog uzroka koji smanjuje količinu svjetla koja ulazi u aparat, a to je refleksija.

Svaki puta kada svjetlosni snop pada na granicu između dvaju različitih sredstava on se cijepa u dva dijela; jedan se dio reflektira, a drugi prolazi kroz sredstvo. Količina svjetla koja se reflektira ovisi o razlici indeksa loma sredstava i o kutu pod kojim zraka upada na granicu. Ako označimo indekse loma jednog i drugog sredstva sa n_1 i n_2, i uzmemo da svjetlo pada okomito, onda količina reflektiranog svjetla u postotcima iznosi:

$$\left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2\cdot 100\%. \qquad (1)$$

Ako je prvo sredstvo zrak ($n=1$), a drugo staklo ($n=1{,}5$) onda iz formule slijedi da se reflektira oko 4% upadne svjetlosti (izračunaj koliko se % reflektira upadne svjetlosti, ako je leća načinjena od optičkog stakla $n=1{,}7$).

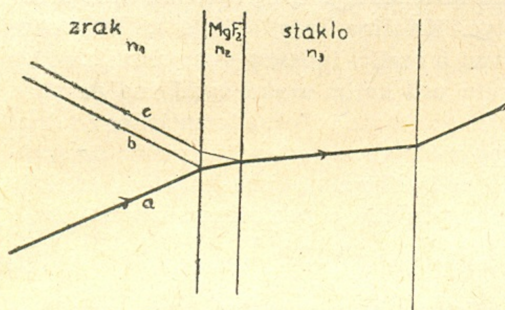
U modernim instrumentima rijetko se upotrebljava samo jedna leća; obično imamo cijeli sistem leća i prizama koje služe za dobivanje što bolje slike. Često broj površina staklo-zrak prelazi i 20, i u tom slučaju gubici uslijed refleksije postaju vrlo veliki. Lako se izračuna pomoću formule (1) da kod 8 ploha (4 leće) gubitak svjetla iznosi oko 40% upadnog intenziteta.

Unatrag 20 godina počeo se u industriji optičkih instrumenata primjenjivati novi postupak u svrhu smanjenja refleksije.

Taj postupak se sastoji u tome da se na površinu stakla, pomoću isparavanja u vakuumu, naloži tanki sloj neke materije koja ima manji indeks loma od stakla. Ta tvar mora imati neku određenu vrijednost indeksa loma (koja se dade izračunati), a osim toga mora biti dovoljno tvrda da se ne izbriše sa stakla. Jedna od vrlo često upotreljavanih tvari je magnezijev fluorid (MgF_2) koji ima indeks loma $n = 1{,}38$.

Da bi sloj djelovao antireflektivno mora imati određenu debljinu. Ona se industrijski kontrolira tako da se promatra boja staklene površine za vrijeme taloženja. Kada površina poprimi plavičasto purpurni izgled onda je postignuta najpovoljnija debljina.

Poznavajući način djelovanja tankog sloja možemo izračunati kolika je debljina potrebna.



Svjetlosna zraka *(a)* pada prvo na površinu zrak-fluorid (slika 1), i na njoj se djelomično reflektira (zraka *(b)*) a djelomično prolazi do plohe fluorid-staklo, gdje se opet dio reflektira (zraka *(c)*), a ostalo prolazi. (Reflektirana zraka *(c)* se pri izlazu iz fluorida ponovo cijepa u reflektiranu i propuštenu, ali je intenzitet reflektirane zrake već tako malen da je možemo zanemariti).

Zrake *(b)* i *(c)* mogu interferirati međusobno, to jest mogu se pojačavati ili poništiti. Zrake će se poništiti interferencijom onda, ako zraka *(c)*, dok prolazi dva puta kroz sloj zakasni upravo za pola valne duljine svjetlosti spram zrake *(b)*. Onda se brijeg jednog vala poklopi sa dolom drugoga i rezultat je 0.

Iz slike je vidljivo da zraka *(c)* prevali spram zrake *(b)* dopunski put $2d$, gdje je d debljina sloja (to je u slučaju da svjetlo pada okomito na sloj; na slici je zraka crtana pod kutem, da se uoče obje reflektirane zrake. Zato, jer brzina svjetla u sredstvu nije ista kao u zraku, mjesto geometrijskog puta moramo uzeti optički put, koji iznosi $2nd$ gdje je n indeks loma sloja.

Razlika puteva za poništenje mora biti pola valne duljine, znači:

$$2 \cdot n \cdot d = \frac{\lambda}{2} \cdot \qquad (2)$$

Iz te formule je vidljivo, da pri nekoj određenoj debljini d, u reflektiranoj svjetlosti će potpuno biti poništena samo jedna valna duljina, t. j. ona za koju je ispunjen uvjet (2). Ostale valne duljine će biti tek djelomično poništene. Zato debljinu biramo tako da se poništi ona boja na koju je oko najosjetljivije, a to je žutozelena. ($\lambda = 5\,500$ Å) Pošto je u reflektiranom bijelom svjetlu poništena ta boja, onda mi vidimo ostale koje sačinjavaju spektar, a to je baš purpurno-plavičasta boja po kojoj je tako poboljšana optika dobila naziv.

Na prvi pogled izgleda čudno da se poništenjem reflektiranih zraka povećava intenzitet onih koji prolaze skroz. Međutim ne smijemo zaboraviti, da je prikazivanje svjetla kao vala samo jedan model koji opisuje vrlo mnoga svojstva svjetla, ali ne i sva. Svjetlo osim valnih svojstava ima i korpuskularna. Ako si zamislimo mjesto svjetlosnog vala roj fotona, i kažemo da smo našim uređajem uspjeli postići da je broj reflektiranih fotona jednak nuli, onda je očito da su svi morali proći. Drugim riječima, poništenjem refleksije povećali smo transmisiju.

Snopovi svjetla *(b)* i *(c)*, osim što se razlikuju u optičkom putu za $\frac{\lambda}{2}$, moraju imati i iste intenzitete da bi se interferencijom potpuno poništili. Znači na obim plohama se mora reflektirati približno ista količina svjetlosti. Ako napišemo taj zahtjev

$$\left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 = \left(\frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}\right)^2$$

i sredimo, dobijemo da indeks loma sloja mora biti

$$n_2 = \sqrt{n_1 \cdot n_3}. \qquad (3)$$

Za staklo koje ima $n_3 = 1{,}5$, trebali bi imati sloj $n_2 = 1{,}2$. Magnezijev fluorid ($n = 1{,}38$) tek približno zadovoljava taj uvjet. Mnogo je bolje ako imamo leće izrađene od stakla $n_3 = 1{,}7$ jer onda MgF_2 vrlo približno zadovoljava teoretsku vrijednost $\sqrt{1{,}7} = 1{,}3$. Na taj način uspijemo smanjiti refleksiju bijelog svjetla kod 8 ploha na 10% (kod stakla $n = 1{,}5$), odnosno na 3% (za staklo $n = 1{,}7$) spram 40% kod nekorigirane optike.

U novije vrijeme se znatno usavršio postupak kombiniranja tankih slojeva, tako da je moguće upotrebom slojeva više različitih materijala postići s jedne strane plohe koje imaju visoku moć refleksije, a s druge strane plohe kod kojih je refleksija unutar cijelog područja spektra vrlo mala.

D. Miler

Jedan način određivanja zbira kvadrata prvih *n* prirodnih brojeva

Poznato je da niz prirodnih brojeva čini aritmetičku progresiju sa razlikom $d = 1$, te se zbir S_1 prvih n prirodnih brojeva može lako izračunati:

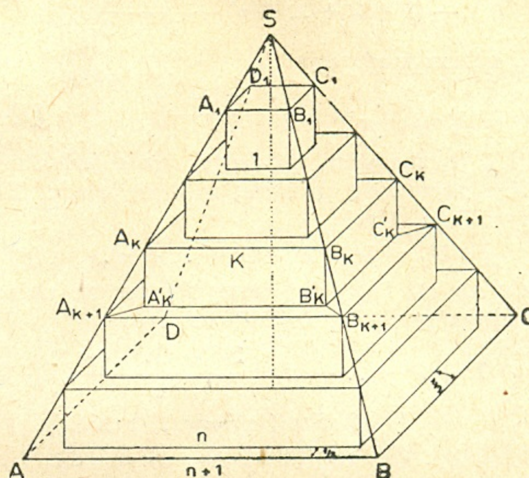
$$S_1 = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Niz kvadrata prirodnih brojeva: $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$ čini međutim tzv. aritmetičku progresiju drugog reda; tu je tek razlika između razlika dvaju uzastopnih članova stalna. Postoji nekoliko postupaka za sabiranje kvadrata prvih n prirodnih brojeva.

Evo jedan način, koji ponovo ukazuje na to, kako je ponekad posredstvom geometrije lako rešiti algebarski zadatak.

Neka su $1^2 = 1^2 \cdot 1$, $2^2 = 2^2 \cdot 1, \ldots n^2 = n^2 \cdot 1$ zapremine pravilnih četverostranih prizmi osnovnih ivica $a_1 = 1$, $a_2 = 2, \ldots, a_n = n$ i visina $H_1 = H_2 = \ldots = H_n = 1$.

Konstruišimo telo T tako, što na prizmu osnovne ivice n stavljamo prizmu osnovne ivice $n - 1$, pa $n - 2$, itd. a da pri tome centri osnova svih prizama budu na zajedničkoj pravoj (sl. 1). Oko tela T može da se opiše prava pravilna četverostrana piramida osnovne ivice $a = n + 1$ i visine $H = n + 1$,

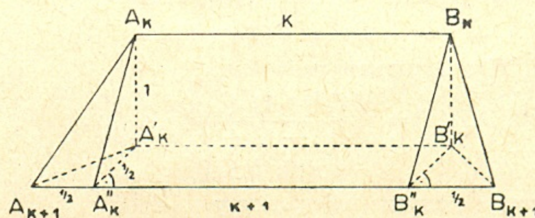


Sl. 1.

kao što se vidi sa slike. Zapremina tela T je tada data sa:

$$V_T = V_{SABCD} - 4(V_1 + V_2 + \ldots + V_n) - V_{SA_1B_1C_1D_1}$$

gde V_k predstavlja zapremine tela $A_kA'_kA_{k+1}\,B_kB'_kB_{k+1}$, $B_kB'_kB_{k+1}\,C_kC'_kC_{k+1}$, $C_kC'_kC_{k+1}\,D_kD'_kD_{k+1}$ i $D_kD'_kD_{k+1}\,A_kA'_kA_{k+1}$.



Sl. 2.

Slika 2 pokazuje da je

$$V_k = V_{A_kA'_kA''_kB_kB'_kB''_k} + V_{A_kA_{k+1}A''_kA'_k} + V_{B_kB_{k+1}B''_kB'_k} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{2}\cdot k + 2\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{k}{4} + \frac{1}{12}.$$

Kako je još

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3}(n+1)^2(n+1) = \frac{1}{3}(n+1)^3$$

$$\text{i } V_{SA_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{3}1^2\cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

to je:

$$V_T = \frac{(n+1)^3}{3} - 4\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right) + \left(\frac{2}{4}+\frac{1}{12}\right) + \right.$$

$$+ \ldots + \left(\frac{n}{4} + \frac{1}{12}\right)\Big] - \frac{1}{3} = \frac{(n+1)^3}{3} -$$

$$- (1 + 2 + \ldots + n) - \frac{n}{3} - \frac{1}{3}$$

ili, nakom sređivanja:

$$V_T = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \qquad (1)$$

V_T je, međutim, sa druge strane jednako zbiru zapremina prizama, iz kojih je telo T sastavljeno. Dakle,

$$V_T = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2. \qquad (2)$$

Iz veza (1) i (2) dobijamo obrazac za zbir kvadrata prvih n prirodnih brojeva:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$$

Judita Zoffmann, Zrenjanin

ZADACI I RJEŠENJA

A) Zadaci iz matematike

377. Дат је низ општим чланом

$$a_n = \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2} - 1.$$

Показати да је граница низа — 1 и одредити размак решења неједначине

$$log\,(a_n - 1) > 0.$$

377. Скратити разломак

$$P(x) = \frac{ab\,(x^2 + 1) + x\,(a^2 + b^2)}{ab\,(x^2 - 1) + x\,(a^2 - b^2)},$$

$$(a > 0,\ b > 0)$$

затим решити неједначину

$$1 < P(x) < 2.$$

378. Kružnica k s polumjerom r dotiče os y u ishodištu pravokutnog koordinatnog sustava. Iz točke M na pravcu $q \equiv x - 4r = 0$ povučene su tangente na kružnicu k i one sijeku os y u točkama N i P. Dokaži analitički, da se položaj težišta T trokuta MNP ne mijenja, ako se točka M miće po pravcu q,

379. Zadani su pravci $p_1 \equiv y - \frac{1}{4}x = 0$, $p_2 \equiv y - 9x = 0$ i točka $T\ (6, -1)$. Nađi jednadžbu pravca s točkom T koji pravce: os x, p_1, p_2, os y siječe redom u točkama A, B, C i D tako da je $AB = CD$! Nađi koordinate tih točaka i dužinu AB!

380. U kuglu polumjera r upisana je pravilna trostrana piramida. Kako se mijenja njezin volumen, kad se visina piramide x mijenja?

381. Neka se odredi pravokutni trokut, komu je poznata kateta b i $3c - a = l$. Diskusija!

382. U jednadžbi

$$(4m + 1)\,sin^2 x - (6m - 1)\,sin\,x + 3m - 6 = 0$$

neka se odredi m tako, da korijeni te jednadžbe budu sinusi dvaju komplementarnih kutova. Odredi također korijene te jednadžbe.

383. Neka se riješi nejednadžba

$$\frac{tg\,x + 1}{4\,sin^2 x - 3} < 0\ (0 < x < 2\pi).$$

384. Riješi nejednadžbu

$$\sqrt{x + 4} - \sqrt{x + 2} > \sqrt{2x - 3}.$$

385.* U kružnicu polumjera $2\,dm$ upisan je trokut s kutovima 15° i 60°, Izračunati površinu tog trokuta (bez upotrebe trigonometrije).

386.* Dijagonale paralelograma su $\sqrt{2}\,cm$ $4\sqrt{3}\,cm$, opseg mu je $14\,cm$. Kolika mu je površina?

387. Показати да се функција променљиве x

$$f(x) = (1 + x^{-1})^{-2} + (1 - x^{-1})^{-2}$$

увођењем нове променљиве n сменом

$$x = (1 - n^{-1})^{\frac{1}{2}} \cdot (1 + n^{-1})^{-\frac{1}{2}}$$

трансформише у рационалну функцију $\varphi\,(n)$.

Решити једначину $\varphi\,(n) = 0$ и на основу тога одредити корене једначине $f(x) = 0$.

388. Полином $P(x, y) = x^5 + y^5 - x^4 y - xy^4$ изразити у облику производа једног линеарног и два квадратна фактора. На основу тога испитати знак полинома $P(x, y)$, уводећи претпоставку $|x| > |y|$.

389. Показати да међу узастопним члановима геометриске прогресије x, y и z постоји идентичност

$$(x + y + z)(x - y + z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Користећи се том идентичношћу решити задатак: наћи три броја који чине геометриску прогресију знајући њихов збир a и збир њихових квадрата b^2.

B) Zadaci iz fizike

181. Kamen je bačen vertikalno u vis početnom brzinom $v_0 = 100\ m\,s^{-1}$. a) Nakon koliko vremena (t) će se kamen nalaziti na visini $h = 25$ m? b) Nakon koliko vremena (t') će doći kamen do najviše točke i kolika je ta visina (h)?

* Zadaci označeni zvjezdicom predviđeni su prvenstveno za 14—16 godišnje učenike.

182. Auto se giba uzbrdo (nagib ceste je $\alpha = 4^0$) brzinom $v_1 = 50$ km sat^{-1} kad mu motor radi punom snagom. Kad se auto giba tom istom cestom nizbrdo i motor mu radi punom snagom, njegova je brzina $v_2 = 200$ km sat^{-1}. Kolikom bi se brzinom v_0 kretao taj auto, uz rad motora punom snagom, po horizontalnoj cesti?

183. Električna je žarulja uronjena do grla u staklenu posudu u kojoj se nalazi 2 l vode. Poslije 5 minuta naraste temperatura vode za 10,5° C. Ako isti pokus ponovimo tako, da posudu i žarulju pokrijemo crnim suknom, da svjetlost ne izlazi, za 5 minuta naraste temperatura za 11° C. Izračunajte: a) Koliko energije izzrači žarulja u 1 sekundi? b) Koliko procenata energije zračenja odnosi svjetlosna energija? (Pretpostavljamo, da voda i staklo propuštaju cjelokupnu svjetlosnu energiju).

184. Žarulju od 110 V s otporom 300 Ω želimo priključiti na mrežu od 220 V izmjenične struje frekvencije 50 Hz. Da nam žarulja ne pregori spojimo s njom u seriju induktivni otpor. Koliki mora biti induktivitet, da žarulja normalno svijetli?

185. Jakost struje u nekoj diodi je 3 m A. Koliko elektrona poleti prema anodi cijevi u vremenu $t = 10^{-3}$ s? (naboj elektrona $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ kulona).

C) Rješenja iz matematike

363. *Дата су два позитивна броја a и b $(a \neq b)$. Показати да је*

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \qquad (1)$$

одатле извести неједнакост

$$(a+b)(b+c)(c+a) > 8\,abc, \qquad (2)$$

уз претпоставку да позитивни бројеви a, b и c нијесу сви међусобно једнаки.

Примјена: какав је троугао чије стране a, b и c задовољавају једнакост

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right) = 8\ ? \qquad (3)$$

Квадрирањем, неједнакост (1), послије сређивања, добија облик

$$(a-b)^2 > 0,$$

чиме је дата неједнакост доказана.

Неједнакост (2) можемо овако написати:

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2} = \sqrt{ab}\cdot\sqrt{bc}\cdot\sqrt{ac}.$$

Неједнакост је јасна када узмемо у обзир неједнакост (1).

Израз (3) можемо написати у овом облику

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2} = \sqrt{ab}\cdot\sqrt{bc}\cdot\sqrt{ac}.$$

Пошто је $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ једино у случају када је $a = b$ излази да стране a, b и c чине равнострани троугао.

Милош Вујовић, 4_3 р. г. Никшић

364. *Састави квадратну једначину чији су корени*

$$x_1 = m + \sqrt{n},\quad x_2 = m - \sqrt{n},\quad (n > 0).$$

На основу изведене једначине израчунати вредност израза

$$A = (m+\sqrt{n})^3 + (m-\sqrt{n})^3.$$

Квадратна једначина чији су корени

$$x_1 = m + \sqrt{n},\quad x_2 = m - \sqrt{n}$$

гласи: $x^2 - 2mx + m^2 - n = 0$.

Израз A је збир кубова корена x_1 и x_2, $A = x_1^3 + x_2^3$.

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2) =$$
$$= (2m)^3 - 3(m^2 - n)(2m) = 2m(m^2 + 3n).$$

Вечански Драгомир, 2а р. г. Вршац

365. *Data je jednadžba*

$$x^2 - \frac{b^2}{2}x + \left(\frac{b^2}{4}\right)^2 - 1 = 0.$$

Ako je b srednja strana trokuta, dokazati ne rješavajući jednadžbu, da je taj trokut pravokutan.

Treba dokazati da je $b^2 = x_1^2 - x_2^2$, t. j. da je $b^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$; $x_1 + x_2 = \frac{b^2}{2}$ (Prema Vièteu) (1)

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$
$$x_1 - x_2 = \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2}$$

Uzevši u obzir (1) i $x_1x_2 = \left(\frac{b^2}{4}\right)^2 - 1$ imamo:

$$x_1 - x_2 = \sqrt{\left(\frac{b^2}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{b^2}{4}\right)^2 + 4}$$
$$x_1 - x_2 = \sqrt{\frac{b^4}{4} - \frac{b^4}{4} + 4}$$
$$x_1 - x_2 = 2 \qquad (2)$$

Tada je

$$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \frac{b^2}{2}\cdot 2 = b^2$$

(ako vodimo računa o (1) i (2)).

Miroslav Furić, svrš. uč. 3d r. g. 1. g. Zagreb

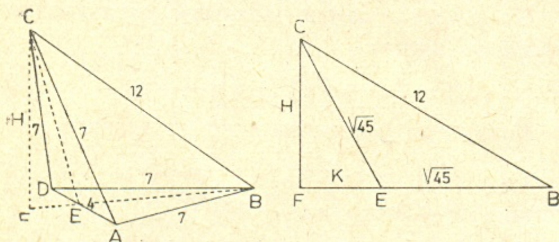
366. *U trostranoj piramidi (tetraedru) dva suprotna brida su 4 cm, 12 cm, a ostali su bridovi 7 cm. Izračunati zapreminu piramide.*

Zapreminu ove piramide izračunat ćemo po formuli

$$V = \frac{BH}{3}$$

gdje je B površina baze, a H visina piramide.

Površinu baze naći ćemo po formuli za površinu trougla $P = \frac{ah}{2}$, gdje je $a = 4\ cm$, $h = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}\ cm$, pa je $B = 6\sqrt{5}\ cm^2$.



Ostaje nam da izračunamo koliko je H. Visinu H naći ćemo iz trougla CFB. Taj nam trougao prikazuje sl. 2. Vidimo da je $H^2 = 12^2 - (k + 3\sqrt{5})^2$ iz $\triangle CFB$ i $H^2 = (3\sqrt{5})^2 - k^2$ iz $\triangle CFE$. Ako izjednačimo nalazi se k:

$144 - 45 - 6k\sqrt{5} - k^2 = 45 - k^2$ ili $-6k\sqrt{5} + 54 = 0$, $k = \frac{54}{6\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$, pa je $H^2 = 45 - \frac{81}{5} = \frac{225-81}{5} = \frac{144}{5}$ i $H = \frac{12}{\sqrt{5}}$. Zato je

$$V = \frac{6\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{12}{\sqrt{5}} = 24\ cm^3.$$

Kovačina Mato, 3_2 r. g. Mostar

Други начин. Запремина тетраедра може се изразити као функција њихових ивица. (Види: В. Петровић: „Запремина произвољног тетраедра као функција његових ивица", „Мат. физ. лист", год. VII бр. 3).

$$144\,V^2 = b^2c^2\,(4a^2 - b^2 - c^2) \qquad \text{или}$$

$$V = \frac{bc\sqrt{4a^2 - b^2 - c^2}}{12};$$

заменом вредности за a, b и c добијамо

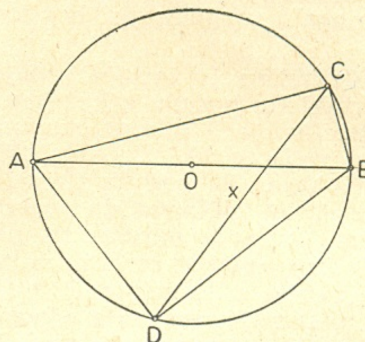
$$V = \frac{48 \cdot \sqrt{36}}{12} = 24\ cm^3.$$

Милисав Калајџић, уч. 4 р. г. Чачак

Na oba je načina riješila zadatak *Најдова Душанка*, 2 кл. гимн. Битола.

367. *Пречник круга је 65 cm. Луковима l_1 и l_2 припадају тетиве 16 cm и 52 cm. Израчунати дужину тетиве, којој припада лук $l_1 + l_2$.*

$AB = 65\ cm$, $BC = 16\ cm$, $BD = 52\ cm$.



На основу Птолемејеве теореме о тетивном четвороуглу, да је производ дијагонал једнак збиру производа наспрамних страна, имамо:

$$AB \cdot CD = AC \cdot BD + BC \cdot AD \qquad (1)$$

Прво ћемо израчунати дужи AD и AC па ћемо их заменити у једначини (1)

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{4225 - 2704} = \sqrt{1521} = 39$$

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{4225 - 256} = \sqrt{3969} = 63.$$

Сада ћемо израдунати дуж $CD = x$

$$65x = 63 \cdot 52 + 39 \cdot 16$$
$$65x = 3900$$
$$x = 60\ cm.$$

Лугомирски Драгослав 2_3 р. 2 г. Крагујевац

368. *Odredi sve parove brojeva, gdje je razlika između njihovog najmanjeg zajedničkog višekratnika i najveće zajedničke mjere jednaka zadanom broju d.*

Ako označimo najveću zajedničku mjeru jednog para tih brojeva s A, ti brojevi su onda $x = Am$, $y = An$ a najmanji zajednički višekratnik je Amn.

Onda imamo

$$Amn - A = d$$

$$mn = \frac{d}{A} + 1$$

Kako je lijeva strana te jednadžbe cijeli pozitivni broj, mora i $\frac{d}{A}$ biti cijeli pozitivni broj. Dakle, A je djeljivo sa d bez ostatka

$$A = 1, \ldots, d.$$

Sada imamo

$$\frac{d}{A}+1=d+1,\ldots,\ 1+1=m\cdot n.$$

Tako dobivenu vrijednost izraza $\left(\frac{d}{A}+1\right)$ prikazujemo kao produkt od 2 relativno prosta broja m i n. Sada imamo

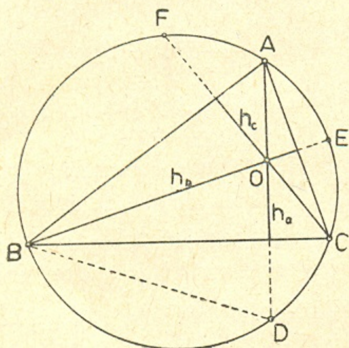
$$x=Am$$
$$y=An$$

Napose: $$mn=\frac{30}{A}+1$$

A	30	15	10	6		5	3	2	1
$\frac{30}{A}+1=mn$	2	3	4	6		7	11	16	31
m	2	3	4	6	3	7	11	16	31
n	1	1	1	1	2	1	1	1	1
Amn	60	45	40	36	36	35	33	32	31
$x=Am$	60	45	40	36	18	35	33	32	31
$y=An$	30	15	10	6	12	5	3	2	1

Paar Vladimir, 3a r. 5. g. Zagreb

369. *Доказати да се симетричне тачке ортоцентра, у односу на стране троугла, налазе на кругу описаном око троугла.*



$\sphericalangle CBE=\sphericalangle DAC$ као углови са нормалним крацима. Пошто су ови углови периферски то ће и лукови који им одговарају бити једнаки $\widehat{CE}=\widehat{CD}$. Следује

$$\sphericalangle CBE=\sphericalangle DBC.$$

На сличан начин доказујемо да је

$$\sphericalangle FCB=\sphericalangle BCD.$$

Дакле $\triangle BDC\cong\triangle BOC$ па је тачка O симетрична са D у односу на страну BC. Истим поступком доказује се симетричност тачака E и F.

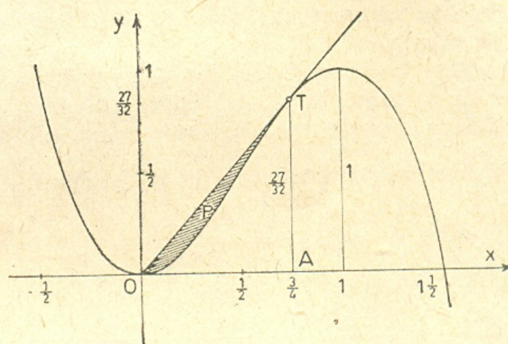
Милош Вујовић, 4_3 р. г. Никшић

370. *Iz ishodišča naj se povleče tangenta na krivuljo $y=-2x^3+3x^2$ in naj se odredi površina omejena s to tangento in krivuljo.*

Tangenta ima enačbo $y=\frac{9}{8}x$, ona se dotika krivulje $y=-2x^3+3x^2$ u točki

$$T\left(\frac{3}{4},\ \frac{27}{32}\right).$$

Površina P med krivuljo in tangento je enaka razliki površin trikotnika OAT in lika, ki ga omejuje krivulja, os x in ordinata



$$P=P\,\triangle\,OAT-\int_0^{3/4}(-2x^3+3x^2)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{27}{32}-\left|-\frac{1}{2}x^4+x^3\right|_0^{3/4}=$$

$$=\frac{81}{256}+\frac{81}{512}-\frac{27}{64}=\frac{27}{512}.$$

Indihar Stanko, 3. r. g. Kočevje

371. *Dokaži a) elementarno b) pomoću računa ekstremnih vrijednosti da je trostruka dijagonala veća od obima pravougaonika.*

a) Treba da je

$$3d>2(a+b),\quad (d=\sqrt{a^2+b^2}),\ \text{t. j.}$$
$$9(a^2+b^2)>4(a+b)^2\quad \text{ili}$$
$$5a^2-8ab+5b^2>0.$$

To je kvadratni trinom od a, čija je diskriminanta $D=(4b)^2-5\cdot 5b^2=-9b^2$ uvijek negativna, te je trinom uvijek pozitivan t. j. nejednakost je uvijek ispunjena.

b) Neka je

$$3d=3\sqrt{x^2+(s-x)^2}=y,$$

gdje je $s=a+b$ i $x=a$.

Načinimo prvu derivaciju

$$y'=\frac{3(2x-s)}{\sqrt{x^2+(s-x)^2}}=0\ \text{za}\ x=\frac{s}{2},$$

te tada y ima minimum jer je $y''\left(\frac{s}{2}\right) > 0.$

$$min = 3\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(s - \frac{s}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}s > 2s,$$

što je i trebalo dokazati.

Mesihović Behdžed, uč. 4. r. g. Mostar

372. *Dokaži analitički, da je projekcija dužine normale na provodnicu pripadne točke kod čunjosjeka konstantna i jednaka poluparametru p!*

Kod parabole znamo, da je ta projekcija jednaka subnormali, koja je konstantna i jednaka p.

Ako je nutarnji kut među provodnicama r_1 i r_2 točka $D(x_1, y_1)$ elipse jednak α, a dužina normale $DN = n$, kvadrat projekcije te dužine na provodnicu r_1 (ili r_2) je $n^2 cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

Kako je $cos\,\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - 4e^2}{2r_1r_2}$,

dobivamo:

$$cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + cos\,\alpha}{2} = \frac{(r_1 + r_2)^2 - 4e^2}{4r_1r_2} = \frac{b^2}{r_1r_2}.$$

Produkt je

$$r_1r_2 = a^2 - \frac{e^2x_1^2}{a^2} = \frac{a^4 - e^2x_1^2}{a^2} =$$

$$= \frac{a^4 - a^2x_1^2 + b^2x_1^2}{a^2} =$$

$$= \frac{a^2(a^2b^2 - b^2x_1^2) + b^4x_2^2}{a^2b^2} = \frac{a^4y_1^2 + b^4x_1^2}{a^2b^2}.$$

Stoga je

$$cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{b^2}{r_1r_2} = \frac{a^2b^4}{a^4y_1^2 + b^4x_1^2}.$$

Kako je nožište normale $N\left(\frac{e^2x_1}{a^2}, 0\right)$, to je

$$n^2 = \left(x_1 - \frac{e^2x_1}{a^2}\right)^2 + y_1^2 = \frac{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}{a^4}$$

i prema tome

$$n^2 cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{b^4}{a^4} = p^2, \quad \text{i stoga } n\,cos\frac{\alpha}{2} = p.$$

Slično za hiperbolu.

S. Š-ka.

373. *Poišči enačbo stožernice, ki ima za žarišče točko $F(0, 0)$, premice: $t_1 \equiv 2x - 3y - 13 = 0$, $t_2 \equiv 7x - 2y - 53 = 0$, $t_3 \equiv 6x - y - 37 = 0$ pa so njene tangente.*

Nožišče normal iz F na t_1, t_2, t_3 so točke:

$$T_1(2, -3), \quad T_2(7, -2), \quad T_3(6, -1)$$

krog, ki gre skozi te točke, je glavni krog stožernice. Središče $S(p, q)$ dobimo iz enačb

$$a^2 = (p-2)^2 + (q+3)^2 =$$
$$= (p-7)^2 + (q+2)^2 = (p-6)^2 + (q+1)^2,$$

ki dajo $S\left(\frac{14}{3}, -\frac{10}{3}\right)$; polos a pa je $\frac{1}{3}\sqrt{65}.$

Razen tega je linearna ekscentričnost

$$e = \overline{FS} = \frac{1}{3}\sqrt{296}.$$

Ker je $e > a$ imamo torej hiperbolo. Enačba stožernice je v polarnem sistemu, kjer je pol F in os x polarna os, os a krivulje pa tvori z 70 kot φ_0:

$$r = \frac{p'}{1 - \varepsilon\, cos\,(\varphi - \varphi_0)} \qquad (1)$$

p' je polparameter, ε pa numerična ekscentričnost. To enačbo lahko transformiramo na kartezijeve koordinate. Najprej je

$$cos\,(\varphi - \varphi_0) = \frac{x}{r}cos\,\varphi_0 + \frac{y}{r}sin\,\varphi_0 =$$

$$= \frac{1}{er}(px + qy), \text{ ker je}$$

$$sin\,\varphi_0 = \frac{q}{r}, \; cos\,\varphi_0 = \frac{p}{r}.$$

Enačba (1) je potem

$$r^2a^2 = [ap' - (px + qy)]^2; \; r^2 = x^2 + y^2.$$

Če sedaj za a, p in q vstavimo gornje vrednosti, za $ap' = b^2 = e^2 - a^2 = \frac{77}{3}$, dobimo enačbo:

$$65(x^2 + y^2) - (-14x + 10y + 77)^2 = 0$$

ali

$$131x^2 + 35y^2 - 280xy - 2156x +$$
$$+ 1540y + 5929 = 0.$$

To je enačba iskane stožernice.

Janez Lesjak, 3. r. g. Kočevje

Napomena uredništva. Drugi dio zadatka može se još ovako riješiti: pošto smo našli glavni krug konike središta $S\left(\frac{14}{3}, -\frac{10}{3}\right)$ i polumjer $a^2 = \frac{65}{9}$ i linearni ekscentricitet $e = \frac{1}{3}\sqrt{296}$ i jer je $e > a$ utvrdili, da je krivulja hiperbola, kojoj je imaginarna poluos $b^2 = e^2 - a^2 = \frac{77}{3}$, odredimo pravce, u kojima su osi. To su

$$7y + 5x = 0, \quad 21x - 15y - 148 = 0.$$

Jednadžba je hiperbole u koordinatnom sistemu (u, v), što ga čine njezine osi

$$\frac{77}{3}u^2 - \frac{65}{9}v^2 = \frac{77}{3}\cdot\frac{65}{9}.$$

Kako je

$$u^2 = \frac{(21x - 15y - 148)^2}{9 \cdot 74}, \quad v^2 = \frac{(7y + 5x)^2}{74},$$

to je jednadžba hiperbole

$$\frac{77}{3}\,\frac{(21x - 15y - 148)^2}{9 \cdot 74} - \frac{65}{9}\,\frac{(7y + 5x)^2}{74} = \frac{77}{3} \cdot \frac{65}{9}$$

ili, ako se sredi i onda skrati s 222, dobije se

$$131x^2 + 35y^2 - 280xy - 2156x + 1540y + 5929 = 0$$ kao gore.

374. *Nacrtaj trokut, ako je zadano* $a + b = l$, $\alpha - \beta = \delta$ i visina v_a.

Naputak: razmotri trokut ABD, gdje je $BD = a + b$.

Uzmimo, da je ABC nacrtan; produžimo BC za $b = CD$ i spojimo A s D. Dobivamo pomoćni trokut ABD; taj je određen s $BD = a + b$, v_a i kutom $BAD = 90^\circ + \frac{\delta}{2}$.

Konstruirajmo najprije trokut ABD: nacrtamo dužinu $BD = a + b$ i paralelu s njom udaljenu za v_a. Konstruirajmo dalje skup svih vrhova kutova $90^\circ + \frac{\alpha - \beta}{2}$, kojima kraci prolaze zadanim točkama B i D (pomoću poučka o kutu između tetive i tangente).

Na mjestu, gdje paralela siječe kružni luk, nalaze se vrhovi A i A_1. Nacrtajmo simetralu od AD, ona siječe BD u vrhu C traženog trokuta. Dobivamo dva trokuta, koji su sukladni. Zadatak je moguć, dok je

$$v_a \leqq r - SE, \text{ ili jer je } SD = r = \frac{l}{2\cos\frac{\delta}{2}},$$

$$SE = \frac{l}{2}\,tg\,\frac{\delta}{2}, \text{ to mora biti}$$

$$v_a \leqq \frac{l}{2}\,\frac{1 - \sin\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{\delta}{2}}. \text{ Za } v_a = \frac{l}{2}\,\frac{1 - \sin\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{\delta}{2}}$$

imamo samo jedan trokut.

Paar Vladimir, uč. 3a r 5. g. Zagreb

375. *Stranice trokuta čine aritmetičku progresiju, kojoj je diferencija jednaka d; poznat je omjer k površine tog trokuta i površine pravokutnika, što ga čine obje manje stranice trokuta. Kolike su stranice trokuta?*

Strane su trougla $x - d$, x, $x + d$. Površina trougla prema Heronovom obrascu je

$$P_1 = \sqrt{s\,[s - (x - d)]\,[s - x]\,[s - (x + d)]},$$

$$s = \frac{x - d + x + x + d}{2} = \frac{3}{2}x,$$

$$P_1 = x\sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{x^2}{4} - d^2\right)}.$$

Površina pravougaonika je $P_2 = x\,(x - d)$, te je

$$\frac{x\sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{x^2}{4} - d^2\right)}}{x\,(x - d)} = k,$$

$$\frac{3}{4}\left(\frac{x^2}{4} - d^2\right) = k^2\,(x - d)^2 \quad \text{ili}$$

$$\left(\frac{3}{16} - k^2\right)x^2 + 2dk^2x - d^2\left(\frac{3}{4} + k^2\right) = 0.$$

Pošto je $x - d + x > x + d$ ili $x > 2d$, trebamo naći vrijednosti za k, za koje će korijeni jednačine ispuniti uslov da su veći od $2d$.

Korijeni su veći od $2d$ ako je $D \geqq 0$, $af(2d) > 0$, $af'(2d) < 0$ t. j. $D \geqq 0$

$$(2dk^2)^2 + 4d^2\left(\frac{3}{4} + k^2\right)\left(\frac{3}{16} - k^2\right) \geqq 0 \text{ za}$$

$$-\frac{1}{2} \leqq k \leqq \frac{1}{2},$$

$af(2d) > 0$ za

$$\left(\frac{3}{16} - k^2\right)\left[\left(\frac{3}{16} - k^2\right)4d^2 + 4d^2k^2 - d^2\left(\frac{3}{4} + k^2\right)\right] > 0 \text{ za } k > \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$af'(2d) < 0$ za

$$\left(\frac{3}{16} - k^2\right)\left[\left(\frac{3}{16} - k^2\right)4d + 2dk^2\right] < 0 \text{ za}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} < k \leqq \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Dakle za $\frac{\sqrt{3}}{4} < k < \frac{1}{2}$ oba korijena zadovoljavaju; samo jedan korijen zadovoljava za $af(2d) < 0$ t. j. za $0 < k < \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Strane su

$$x = \frac{16\,(k^2d + 3\sqrt{1 - 4k^2})}{3 - 16k^2}, \quad x' = x - d,$$

i

$$x'' = x + d.$$

Dvizac Menail, 3 Am STŠ Mostar

Riješili zadatke iz 4. broja

Andrić Pero, 2. a r. g. Visoko, 363, 364, 365, 371 (djel.); *Azinović Luka,* 2_2 r. g. Mostar, 364 (djel.); *Cankar Ivan,* 4. r. g. Škofja Loka, 364, 365, 367, 375 (djel.); *Dvizac Menail,* 3 Am STŠ Mostar, 363, 364, 365, 366, 367, 369, 370, 371, 374, 375; *Fill Franjo,* 2_4 r. g. Sombor, 363, 364, 365, 366, 367; *Furić Miroslav* 3. a r. 1. g. Zagreb, 363, 364, 365, 366, 367, 369, 371 (djel.); *Indihar Stanko* 3. r. g. Kočevje, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371 (djel.) 375; *Kovačina Marko,* 3_2 r. g. Mostar, 363, 364, 365, 366, 367, 369, 371, 374, 375; *Lautar Franjo,* 2. a r. g. Kočevje, 363, 364, 367, 374; *Lesjak Janez,* 3. r. g. Kočevje, sve zadatke; *Baček Vilko,* 2. b r. 4. g. Ljubljana, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 371, 374; *Mesihović Behded,* 4. r. g. Mostar, sve zadatke; *Paar Vladimir,* 3. a r. 5. g. Zagreb, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 371, 374; *Pohar Florijan,* 2. b r. g. Kranj, 363, 364, 368, 369, 370, 371, 374, 375 (djel.); *Suljagić Salih,* 3. c r. g. »B. Ogriz.« Zagreb, 363, 364, 365, 367, 369, 371, 374, 375 (djel.); *Šimat Marko,* 5. d r. 3. g. Zagreb, 364, 366, 370; *Богданов Лазар,* 2_1 р. 8 беогр. г. 363, 364, 367; *Вечански Драгомир,* 2 а р. гимн. Вршац, 363, 364, 365, 366, 367, 369, 371, 374, 375; *Вујовић Милош,* 4_3 р. г. Никшић, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370 (дел.), 371, 374, 375; *Гогић Светозар,* сврш. уг. г. Никшић, 363, 364, 365, 375; *Јеремић Биљана,* уч. г. „С. Марк.", Ниш, 363, 364, 365, 366, 367, 375; *Калајџић Милисав,* 4 р. г. Чачак, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 371, 374; *Кирић Миодраг,* 4_3 р. г. Зрењанин, 363, 364, 365, 366, 367, 369, 374; *Лугомирски Драгослав,* 2_3 р. 2 г. Крагујевац, 363, 364, 365, 366, 367, 369; *Мавнов Илија,* 2 р. кл. г. „Ц. Димов" Скопје, 363, 364, 365; *Милатиновић Слободан,* 4_2 р. г. Смед. Паланка, 363, 364, 366, 367, 368, 369, 375; *Миновски Ристо,* 3 кл. г. „Цв. Димов" Скопје, 363, 364, 365, 366, 367, 371 (дел.). 375 (дел.); *Најдова Душанка,* 2 кл. г. Битола, 363, 364, 365, 366, 367, 369, 374; *Новак Дебељевић,* гео$_2$ Титоград, 367, 374; *Павловић Владан,* сврш. уч. г. Светозарево, 369, 370, 375; *Поточник Златко,* 1 раз. 14 беогр. г. 363, 367; *Савић Радмило,* 2_3 р. г. Аранђеловац, 364, 366.

Pravodobno stigla rješenja iz 3. broja

Stojaković Zoran, 2c r. g. »Sv. Mark.«, Novi Sad, 349, 354, 355, 362; *Шандуловски Стапат,* 4б кл. г. »Ј. Б. Тито«, Скопје, 349, 350, 351, 352, 354, 355, 356, 357, 360, 361, 362.

D) Rješenja zadataka iz fizike

176. *Amplituda jednostavnog harmoničkog titranja je 30 cm, a perioda 2 s. U početnom času $t = 0$, pomak je jednak $s = 0$. Kolike su numeričke vrijednosti pomaka, brzine i akceleracije u času $t = T/12$?*

Krožna frekvenca je enaka::

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2}\,\mathrm{s}^{-1} = \pi\ \mathrm{rad\ s}^{-1}.$$

Fazni kot po času:

$$\frac{T}{12} = \frac{2}{12}\,\mathrm{s} = \frac{1}{5}\,\mathrm{s}.$$

Potem je:

$$\omega t = \pi \cdot \frac{1}{6} = \frac{180°}{6} = 30°.$$

Ker je $\sin 30° = \frac{1}{2}$, a $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, sledi potem za pomik ($s$), hitrost ($v$) in pospešek ($a$):

$$s = A \sin \omega t = 30 \cdot \frac{1}{2} = \underline{15\ \mathrm{cm}}$$

$$v = \omega A \cos \omega t = \pi \cdot 30 \cdot \sqrt{3}/2 = \underline{81{,}48\ \mathrm{cm\ s}^{-1}}$$

$$a = \omega^2 s = \pi^2 \cdot 15 = \underline{148\ \mathrm{cm\ s}^{-2}}.$$

Stanko Indihar, 3. r. g. Kočevje

177. *Uzimamo vodu iz dva spremnika, od kojih jedan ima temperaturu 27 °C, a drugi 67 °C. Koliko kilograma vode treba uzeti iz jednoga, a koliko iz drugog spremnika, da bi dobili 40 kg vode temperature 42 °C?*

Prema Richmannovom pravilu dobivamo izraz za temperatutu smjese:

$$\tau = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_1 t_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}.$$

Iz zadanih veličina ($c = 1$ za vodu) dobivamo jednadžbe:

$$42 = \frac{27\,m_1 + 67\,m_2}{m_1 + m_2},$$

odnosno $m_1 + m_2 = 40.$

Iz te dvije jednadžbe izračunamo: $m_1 = 25$, $m_2 = 15$. Treba dakle uzeti 25 *kg* vode temperature 27 °*C* i 15 *kg* vode temperature 67 °*C*, da dobijemo 40 *kg* vode temperature 42 °*C*.

Marijan Halvaks, 3. r. g. Slav. Požega

178. *Titrajni krug ima koeficijent samoindukcije* 0,08 *mH i kapacitet* 10^{-3} μF. *Koliki kapacitet treba uključiti serijski u taj krug, da rezonantna frekvencija bude* 660 *kHz?*

Rezonantna frekvenca je enaka lasni frekvenci nedušenega nihajnega kroga:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}} = f_0 .$$

Izračunajmo koliko kapaciteta mora imeti kondenzator, da dobimo frekvenco

$$f_r = 600\ k\,Hz.$$

$$c = \frac{1}{4\pi^2 L f_r^2} = 730\ pF.$$

Po zakonu o serijskem spajanju kondenzatorjev

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \qquad \text{je}$$

$$c_2 = \frac{c \cdot c_1}{c_1 - c} = \frac{730\ pF \cdot 10^3\ pF}{(1000 - 730)\ pF} = \underline{2{,}7 \cdot 10^3\ pF},$$

ki je c kapaciteta po vezovi, c_1 kapaciteta pred vezovu, a c_2 kapaciteta kondenzatorja, ki ga moramo serijski vezati.

Franjo Lautar, 2.a r. g. Kočevje

179. *Izmjenična struja koja se mijenja po zakonu* $i = 3 \cos 450\ t$ *ampera, grana se u točki A u dvije grane. Jedna grana ima otpor* 60 Ω, *a druga* 40 Ω. *U točki B grane se ponovno sastaju. Kolika se energija pretvori u toplinu između točaka A i B u vrijeme jedne periode?*

Celoten upor R med točkama A in B je dan z

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{60 \cdot 40}{60 + 40}\ \Omega = 24\ \Omega .$$

Efektivna jakost toka je

$$I_{ef} = I_0 / \sqrt{2} = 3 / \sqrt{2}\ \text{A};$$

čas ene periode pa je

$$t = \frac{2\pi}{450}\ s = 0{,}014\ \text{s}$$

in energija ki se spremi v toploto pa:

$$Q = I^2_{ef} \cdot R \cdot t = \frac{9}{2}\ \text{A}^2\ 24\ \Omega \cdot 0{,}014\ \text{s} = 1{,}51\ \text{J}.$$

Janez Lesjak, 3. r. g. Kočevje

180. *Dijapozitiv ima* 400 cm^2 *i treba ga proicirati na platno, koje ima oblik sličan dijapozitivu, a površinu* 9 m^2. *U koju udaljenost od dijapozitiva treba staviti objektiv projekcionog aparata, ako je žarišna daljina objektiva* $f = 30\ cm$?

Površini slike in dijapozitiva sta v razmerju kvadratov njihovih stranic; razmerje teh, pa je povečava slike n.

$$n = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{9 \cdot 10^4}}{\sqrt{4 \cdot 10^2}} = 15$$

$$b = 15\,a$$

Enačba leče je

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{15a} = \frac{1}{30}$$

$$a = \underline{32\ cm}.$$

Objektiv moramo postaviti 32 *cm* pred diapozitiv.

Franci Bogovčić, 3.b r. g. Brežice

Riješili zadatke iz fizike iz 4. broja

Andrić Pero, 2. a r. g. Visoko, 177; *Bogovčić Franci*, 3. b r. g. Brežice, 177, 180; *Halvaks Marijan*, 3. r. g., Slav. Požega, 177; *Indihar Stanko*, 3. r. gimn. Kočevje, 176, 177, 180; *Lautar Franjo*, 2. a r. g. Kočevje, 176, 177, 178, 179 (djel.), 180 (djelom.); *Lesjak Janez*, 3. r. g. Kočevje, 176, 177 (djel.), 178 (djel.), 179, 180; *Paar Vladimir*, 3. a raz. 5. gimn. Zagreb, 177; *Кирић Миодраг*, 4_3 р. г. Зрењанин, 177; *Вечански Драго*, 2 а р. гимн. Вршац, 176 (дел.), 177, 180 (дел.).

Vježbe za učenike gimnazija — Počeci nacrtne geometrije[1]

I. Uvod

1. METODE I ZADAĆA NACRTNE GEOMETRIJE

(nauka o projiciranju)

Geometriju dijelimo na dva glavna dijela, i to na ravnu geometriju (planimetriju) i na prostornu geometriju (stereometriju).

Ravna geometrija obrađuje svojstva i odnose ravnih likova a u prostornoj geometriji obrađujemo likove, koji po volji leže u prostoru.

[1] Kako će se počevši od škol. god. 1960./61. učiti nacrtna geometrija u gimnazijama, donosit ćemo ove i slijedeće godine u nastavcima prve elemente te geometrije da se učenici mogu postepeno spremati za taj studij

Likovi ravnine mogu se prikazati u pravom obliku, a sve konstrukcije o njima izvodimo direktno. Prostorni likovi ne mogu se nacrtati u prostoru niti se mogu na njima izvoditi konstrukcije. Trebalo bi praviti modele. Zbog teškoća oko toga tražile se metode koje bi modele nadomjestile crtnjom u ravnini i nađene su takve metode. Pomoću tih metoda mogu se prikazati u jednoj ravnini ne samo postojeći predmeti (n. pr. zgrade, strojevi, mostovi i dr.) nego i zamišljeni predmeti, koji se dadu onda i načiniti prema crtežu.

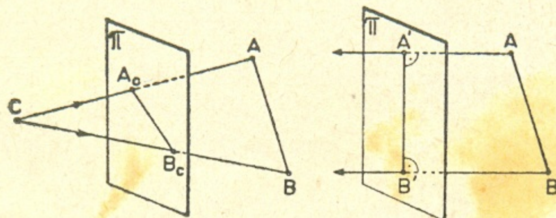
Nauka koja nas uči te metode je *nacrtna (deskriptivna)* geometrija ili *nauka o projiciranju.*

Metoda nacrtne geometrije sastoji se u projiciranju prostornih oblika na ravninu (latinski: projicere = prometnuti, prebaciti). Imamo tri vrste projiciranja i to:

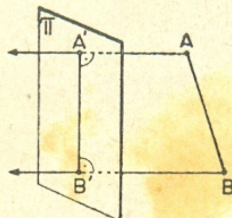
a) centralno projiciranje; b) pravokutno projiciranje; c) kosokutno projiciranje. — Pravokutno i kosokutno projiciranje zovemo jednim imenom i *paralelno projiciranje.*

a) Centralno projiciranje (ili perspektivno preslikavanje) (sl. 1). Čvrstu točku prostora (centar) C spajamo sa svakom točkom predmeta *(A i B)* i odredimo probodište tih spojnica s nekom čvrstom ravninom Π; probodišta A_c i B_c su centralne projekcije točaka s obzirom na centar C, a ravnina slike je Π.

b) Pravokutno (ili ortogonalno) projiciranje (sl. 2).



Sl. 1.

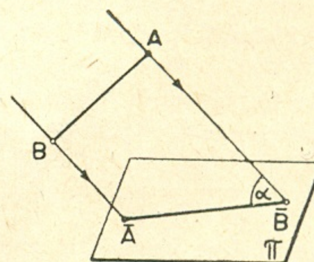


Sl. 2.

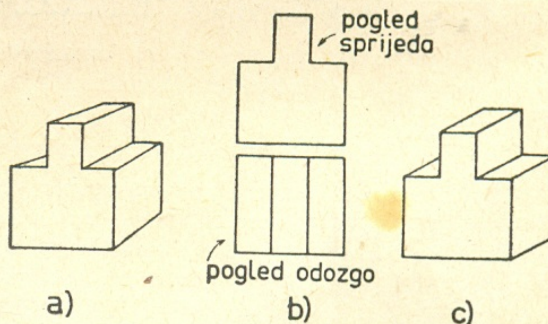
Iz neke točke A prostora povučemo okomicu na neku čvrstu ravninu Π; probodište te okomice A' je pravokutna projekcija točke A na ravninu Π. To isto vrijedi i za ostale točke prostora B, C i t. d.

c) Kosokutno (ili klinogonalno) projiciranje (sl. 3)

U ovoj projekciji kroz točku A prostora povlačimo kos pravac prema ravnini Π — pod kakvimgod kutom α. Taj kut ostaje za cijelo projiciranje isti. — Probodište kosog pravca s Π je $\bar{A}$ i to je kosa projekcija točke A na ravninu Π uz kut α. — Vrijedi isto i za točke B, C. i t. d.



Sl. 3.



Sl. 4.

U slici 4. prikazan je isti predmet (vez drvene građe) u sve tri metode projiciranja. — Vidi se odmah da je perspektiva (sl. 4a) plastična (zorna), ortogonalna projekcija (sl. 4b) nije plastična toliko ali daje mjere (metrična je), dok je kosa projekcija (sl. 4c) neka sredina između prve dvije.

Osnivač nacrtne geometrije *Gaspard Monge* (1798 god.) označio je njen zadatak ovako:

»Prvi je cilj prikazati točno crtnjama, koje imaju dvije dimenzije odnose objekata, koji su trodiomenzionalni i koji se mogu strogo definirati.

Drugi je cilj izvesti iz egzaktnih projekcija tjelesa sve što nužno izlazi iz njihovih oblika i položaja; u tom je smislu posao nacrtne geom. i tražiti istinu«.

Nacrtna geometrija je matematski predmet samo što je zbog premnogih upotreba u praksi bila teoretska strana zanemarivana. — Danas ona ima puno i praktično i teoretsko značenje.

2. OBILJEŽAVANJE ELEMENATA U NACRTNOJ GEOMETRIJI

Elementi prostora su točka, pravac, ravnina, iz njih postaju druge tvorevine: kut, ravni lik, krivulja, površina, tijelo. — Elemente označujemo slovima a uz projekciju meće se isto slovo s osobitim znakom n. pr. za točku A stavljamo A_c, A', $\bar{A}$ i t. d.

Projekcijom i oznakama opisujemo prostornu tvorevinu i zato se ova nauka zove i *deskriptivna geometrija* (latinski descriptio — opisivanje).

Točke prostora bilježimo velikim latin. slovima n. pr. A, B, T i t. d. a njihove projekcije A_c, B_c, T_c ili $A' B' T'$ ili $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{T}$, i t. d.

Pravci se bilježe malim latinskim slovima p, a, b; njihove projekcije p_c, a_c, b_c ili p', a' b' *ili* p'', a'', b'' i t. d.

Ravnine i oble površine bilježe se malim ili velikim grčkim slovima: α, β, γ, Γ, Δ, Φ i t. d.

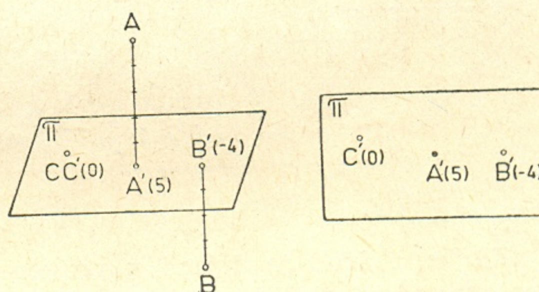
Tvorevina koja nastaje iz dva elementa (kao produkt) može se u tumačenju pobliže označiti slovima tih elemenata, tako na pr. $[p, \alpha]$ znači probodište pravca p s ravninom α; $[r, s]$ znači ravninu kroz dva pravca (koja se sijeku) i t. d.

3. NAPOMENA ZA UČENJE NACRTNE GEOMETRIJE

Nacrtna geometrija je progresivna nauka t. j. u njoj se od jednostavnijeg polazi neprestano naprijed u sve zamršenije probleme. Za to u svakom i najsitnijem pitanju treba nastojati oko što jasnijeg poimanja. Ako se tako ne postupa napredak na kasnijem stepenu ne će biti lako moguć. — Stalno treba uspoređivati ono što se čita s onim što je nacrtano i to vidjeti. Više se gleda nego li uči. Nacrtna geometrija je kao i ljepota prirode koja što je više gledamo to je više volimo i upoznajemo.

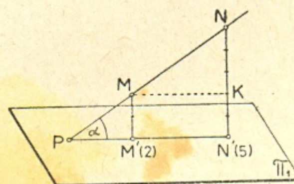
II. Ortogonalno (pravokutno) projiciranje na jednu ravninu ili kotirana projekcija

1. *Projiciranje točke.* Ako iz neke točke A prostora (sl. 5) spustim okomicu na osnovnu ravninu Π i nožište okomice označim s A' to nožište je pravokutna projekcija točke A na ravninu Π. — Samom projekcijom A' nije određena i točka A u prostoru. Trebamo da uz A' napišemo i daljinu točke A od ravnine t. j. A' (5). — Ta daljina zove se *kota* a čitavo projiciranje kotirano. — Točka B je ispod ravnine i ima negativnu kotu dok točka C je u ravnini Π i njezina kota je 0.

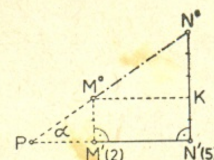


Sl. 5.

2. *Projiciranje dužine. — Pravac.* Dužina MN imat će za projekciju dužinu $M'N'$. — (sl. 6a).



Sl. 6.a

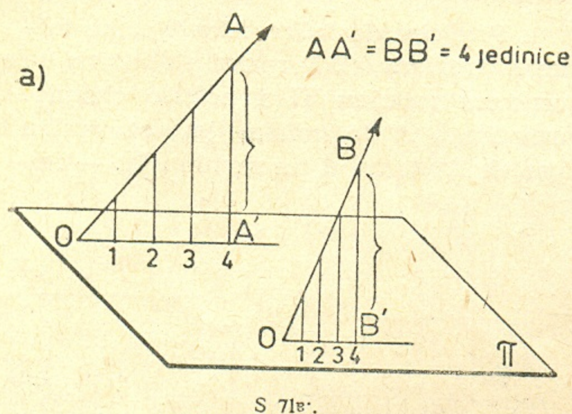


Sl. 6.b

Dužina MN i projekcija $M'N'$ određuju trapez $M'N'NM$. — Taj se trapez može oko stranice $M'N'$ prevaliti u Π (sl. 6b). — Na prevaljene okomice na projekciju u M' i N' prenesemo kotu 2 od M', a kotu

5 od N' i dobijemo točke M^0N^0 koje spojene daju pravu veličinu dužine MN.

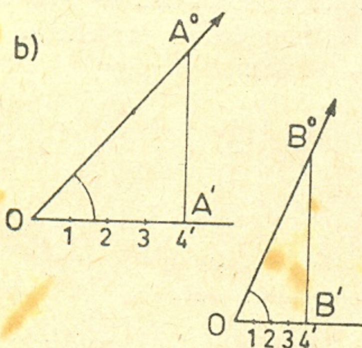
Produžimo li dužinu MN preko krajeva imamo pravac. — Projekcija pravca je pravac. — Gdje se sijeku pravac i projekcija tamo je probodište pravca s ravninom Π. U sl. 6b vidi se prava veličina kuta priklona pravca s ravninom Π.



S 7la.

Vježbe: 1. Kad je dužina u prostoru potpuno određena? 2. Je li projekcija dužine veća ili manja od dužine u prostoru? 3. Kad se dužina projicira u pravoj veličini? 4. Kad se dužina projicira kao točka? 5. Istostran trokut ($a = 3$ cm) je projekcija trokuta u prostoru s kotama $A'(2)$ $B'(5)$ $C'(3)$; naći mu pravu veličinu.

3. *Graduiranje pravca* (sl. 7). U slici su prikazane dvije dužine OA i OB raznih nagiba prema Π. — Točke A i B imaju jednaku kotu 4. — Nađemo projekcije

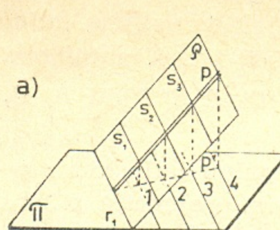


Sl. 7.b

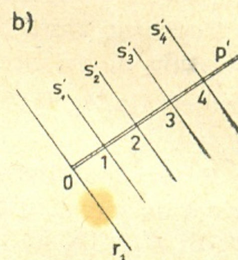
dužina OA' i OB'. — Dužine projekcija podijelimo na toliko jednakih dijelova kolika je razlika kota njihovih krajnjih točaka (ovdje 4). — Svaka djelišna točka na projekciji ima određenu cijelu kotu 0, 1, 2, 3, 4. — Kote dviju susjednih točaka razlikuju se za jedinicu. — Dobiveni dijelovi na projekcijama su različni što ovisi o nagibu pravca. Kažemo da je pravac tim postupkom graduiran; dijelovi u projekciji zovu se intervali. — Ukratko: graduiranje je označivanje na projekciji pravca onih točaka koje imaju cijele kote. Projekcija neomeđena pravca, koja je graduirana određuje potpuno pravac u prostoru. U sl. 7b nađen je prelog pravaca OA i OB u ravninu crtnje.

Vježbe: 1. Kakve intervale imaju paralelni pravci? 2. Kakve interale imaju međusobno okomiti pravci?

4. *Određivanje ravnine.* U teoretskim zadaćama ravnina može biti određena s odredbenim elementima (3 točke, točka i pravac ili 2 pravca). — Za praktične zadaće ravnina nam je određena priklonicom p *(graduiranom).* U sl. 8a)



Sl. 8.a



Sl. 8.b

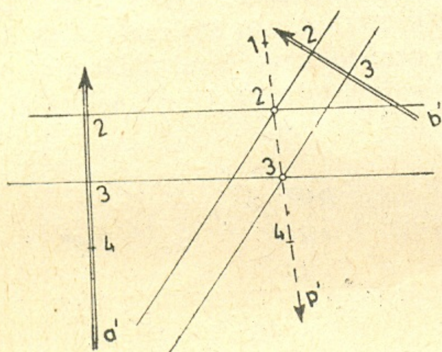
prikazana je ravnina ϱ. Njezina presječnica s Π je r_1 i zove se *trag* ravnine (osobiti pravac u ravnini). Pravac u ravnini ϱ koji je okomit na trag ravnine r_1 zove se *priklonica* ravnine. — Njezina projekcija je okomita na r_1. — Sl. 8b prikazuje projekciju priklonice. Okomito na nju kroz cijele kote idu projekcije presječnica ravnine s horizontalnim ravninama u visini cijelih kota, i zovu se *sutražnice* ili *linije jednakih visina* ili *slojnice.* Kroz kotu 0 ide trag ravnine.

Nije utvrđeno, gdje će se početi s graduiranjem priklonice (i pravca uopće). Uzimljemo onaj dio koji nam treba ili koji je zadan. — Graduiranje je zadano jednim intervalom i kotama njegovih

krajnjih točaka ili kotama dviju kojih god točaka projekcije pravca.

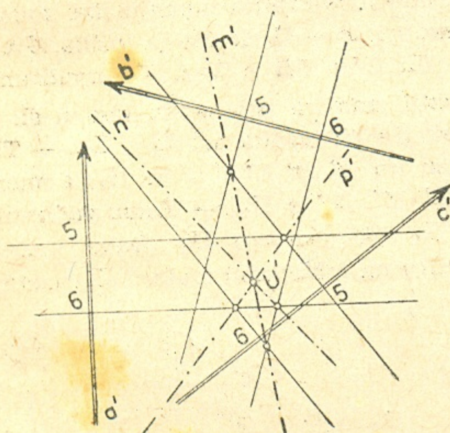
Zadaci:

1. *Naći presječnicu ravnina* α *i* β. — Ravnina α zadana priklonicom a' a β sa b'. — U točkama 2 i 3 postavim okomice (sutražnice ili slojnice) na svaku priklonicu. Gdje se sijeku slojnice istih brojeva to su točke presječnice zadanih ravnina. (Sl. 9).



Sl. 9.

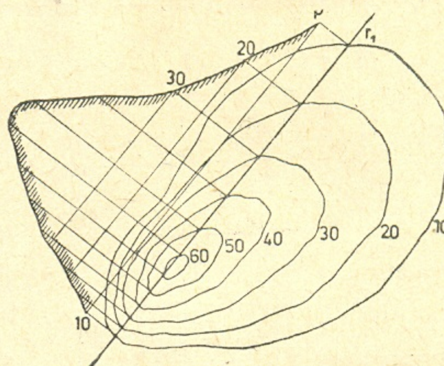
2. *Naći zajedničku točku triju ravnina* α, β *i* γ. (Sl. 10). Ponovimo postupak iz sl. 9 za ravnine $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ i $\beta\gamma$. — Sve tri



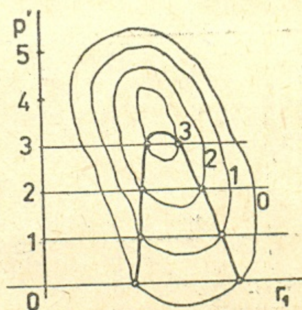
Sl. 10.

sjecišnice prolaze točkom *U* koja je zajednička za sve 3 ravnine.

3. *Zadaće iz primjene kotirane projekcije.* a) *profil terena (zemljišta)* (sl. 11). U sl. 11. prikazana je na terenu (zemljištu) jedna uzvisina. Presijecimo uzvisinu vertikalnom ravninom ϱ. Ona siječe ravninu Π u tragu r_1. Prevalimo ravninu ϱ u ravninu Π oko r_1. U sjecištima r_1 s krivuljama jednakih visina ili niveau krivuljama dignemo okomice i na njih nanesemo odgovarajuće kote. Ako dobivene točke spojimo dobivamo profil ove uzvisine (terena ili zemljišta). b) *ravni presjek uzvisine ravninom* ϱ. U sl. 12. zadana je projekcija neke uzvisine niveau-krivuljama 0, 1,



Sl. 11.



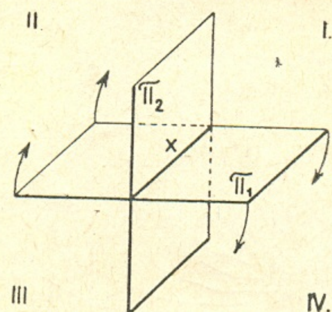
Sl. 12.

2, 3 i ravnina ϱ svojom graduiranom priklonicom p i tragom r_1. Svakom djelišnom točkom na p' može se položiti sutražnica. One će biti iste visine, s jednom od niveau krivulja. Sutražnica siječe niveau-krivulju u 2 točke koje su na uzvisini i u ravnini ϱ. Učinimo li to sa više sutražnica i presječne točke spojimo dobivamo projekciju one krivulje u kojoj ravnina ϱ siječe uzvisinu.

III. Ortogonalno projiciranje na dvije ravnine

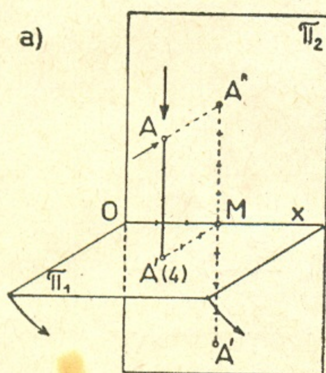
1. *Objašnjenja.* Kod projiciranja na jednu ravninu treba nam osim projekcije točke i njezina kota da je potpuno od-

redimo u prostoru. — Ovom projekcijom predočeni predmeti nisu pregledni. — Da se tome doskoči uvedeno je projiciranje na 2, 3 ili više ravnina. — Dosadašnja

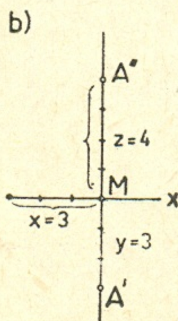


Sl. 13.

ravnina projekcija je horizontalna i zovemo je Π_1, a druga ravnina, koju uvodimo je vertikalna i bilježimo je s Π_2. — Sijeku se u *osi* x. Dijele čitav prostor na 4 kvadranta (vidi sl. 13). — Ravninu Π_1 okrećemo oko osi x dok ne padne u Π_2 i onda imamo ravninu crtnje.



Sl. 14.a



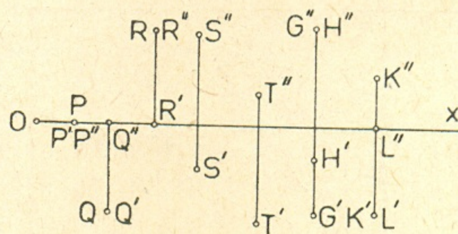
Sl. 14.b

2. *Ortogonalna projekcija točke* (sl. 14). Zadana je kotirana projekcija $A'(4)$ na Π_1. Postavimo Π_2 i projiciramo A u A'' okomicom na Π_2 *(druga projekcija* ili *nacrt)*. (Sl. 14a). — Ako zaokrenemo Π_1 oko osi do Π_2 onda A' dolazi na okomicu $A''M$ osi x (vidi sl. 14b). — Nastaje slika ortogonal. projekcije točke na dvije ravnine i A'' (vertikalna ili druga projekcija ili nacrt) s A' (horizontal. ili prva projekcija ili tlocrt) leže u okomici na os x.

Dalje vidimo da je točka A u prostoru određena sa 3 broja ($3 = x$, $3 = y$, $4 = z$).

— Zadaje se ovako A (3, 3, 4). — Prvi se broj nanosi po osi x od početka O (koji se uzimlje po volji ali onda za istu sliku ostaje do kraja) i to desno pozitivno a lijevo negativno. Drugi broj nanosimo po osi y i to (od osi x) dolje pozitivno, gore negativno a treći broj ide po osi z (od osi x) i to gore pozitivno, a dolje negativno.

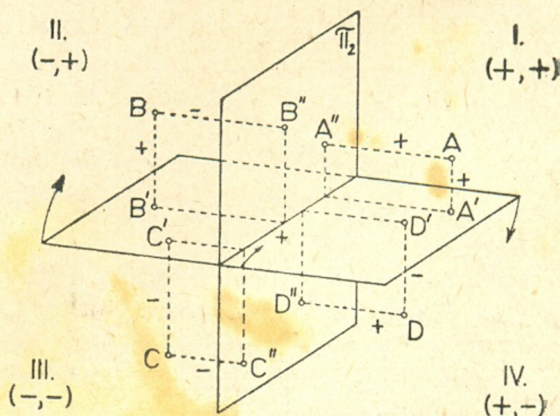
Vježbe: 1. Koji položaj u prostoru imaju točke P, Q, R, S, T, G i H, K i L (u sl. 15)? 2. U sl. 14b što znači A (3, 3, 4) i što nam to omogućuje? 3. Nacrtaj projekcije ovih točaka: A (—4, 4, 5) B (3, —3, 5) C (4, 2, —4).



Sl. 15.

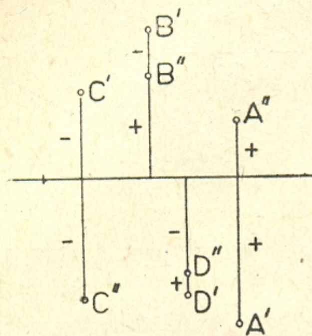
3. *Ortogonalne projekcije točaka koje su u raznim kvadrantima.* Projekcije točke svakog kvadranta nemaju isti položaj prema osi x. — U sl. 16a je točka A u I., B a II., C u III. i D u IV. kvadrantu.

Dobili smo na isti način kao u sl. 14. projekcije tih točaka na Π_1 i Π_2. — Tlocrti su im A' B' C' i D' u Π_1 a nacrti A'', B'', C''. D'' u Π_2. — Kada zaokrenemo Π_1 oko osi x u Π_2 (kako kazuju strijelice na lukovima) onda u Π_2 nastaje



Sl. 16.a

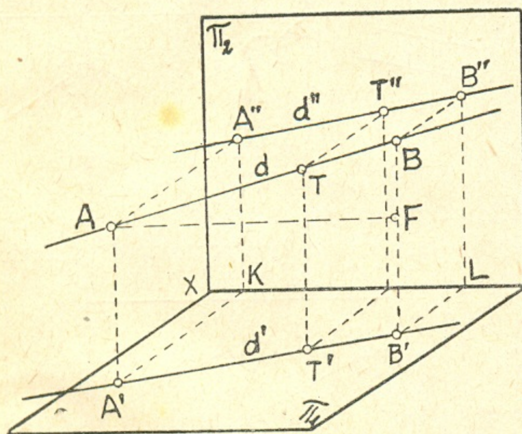
slika 16b). Iz nje vidimo da projekcije točke imaju ovaj položaj prema osi x: ako je točka u I. kvadrantu (A) tlocrt je ispod osi x a nacrt nad x, ako je točka u II. kvadrantu (B), tlocrt je iznad osi x



Sl. 16.b

i nacrt nad x, ako je točka u III. kvadrantu (C) tlocrt je iznad osi x a nacrt ispod x, ako je točka u IV. kvadrantu (D) tlocrt je ispod osi x i nacrt ispod x.

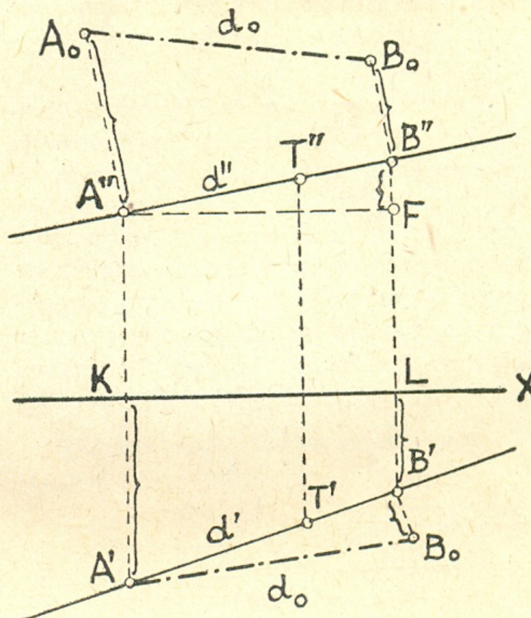
4. *Ortogonalna projekcija dužine* (sl. 17) Projiciramo li krajnje točke dužine AB na Π_1 dobivamo A' i B' Dužina $A'B'$ je tlocrt dužine AB. Isto tako i dužina $A''B''$



Sl. 17.a

je nacrt dužine AB a dobivena je okomicama AA'' i BB''. Uzmemo li na dužini AB točku T onda će T' biti na $A'B'$ a T'' na $A''B''$. Ako ujedinimo Π_1 sa Π_2 u ravninu crtnje dobivamo sl. 17b).

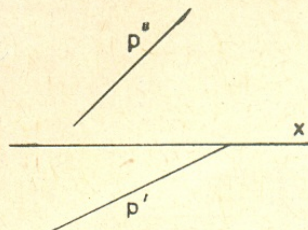
5. *Prava veličina dužine* (sl. 17). U sl. 17 a) vidimo trapeze $AB\,B''A''$ i $AB\,B'A'$. Ove trapeze možemo oko projekcija dužine prevaliti i to prvi oko d'' u Π_2, a drugi oko d' u Π_1. Time ćemo dobiti pravu veličinu dužine. — Mi smo nacrtali u A'' i B'' okomice na d'' i na njih prenijeli



Sl. 17.b

KA' i LB' i dobili A_0 i B_0 što daje d_0 a to je prava veličina dužine AB. Trapez $AB\,B'A'$ nismo uzeli nego smo umjesto njega u slici uzeli diferencioni trokut AFB što malo skraćuje posao. Produžimo li dužinu preko krajnjih točaka nastaje pravac.

Vježba: 1. Kako bi odredio kut priklona dužine prema Π_1 i Π_2? 2. Da li točka T' dijeli $A'B'$ i točka T'' dužinu $A''B''$ po istom omjeru kao T što dijeli dužinu AB?

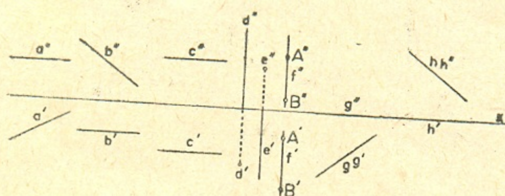


Sl. 18.

6. *Projekcije neomeđena pravca* (sl. 18). Ako u ravnini nacrtamo pravac p' i pravac p'' to su ortogonalne projekcije određena pravca u prostoru na Π_1 i Π_2.

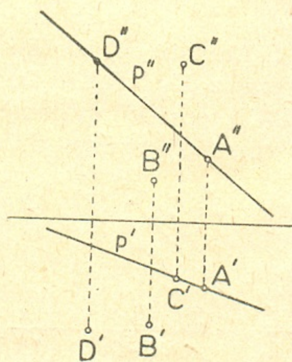
On je presječnica ravnine kroz p' okomite na Π_1 i ravnine kroz p'' okomite na Π_2. — Pravac može biti sadržan samo u jednom kvadrantu, ili u dva kvadranta, a može se protezati najviše kroz 3 kvadranta.

Pamti: pravac prolazi prvim kvadrantom onim svojim dijelom kojega je prva projekcija ispod osi x a druga iznad osi x; u drugom kvadrantu je onaj dio pravca za koji su i prva i druga projekcija iznad osi x; kroz treći kvadrant ide onaj dio pravca kojemu je prva projekcija iznad osi x, a druga ispod osi x; u četvrtom kvadrantu je onaj dio pravca za koji su i prva i druga projekcija ispod osi x.



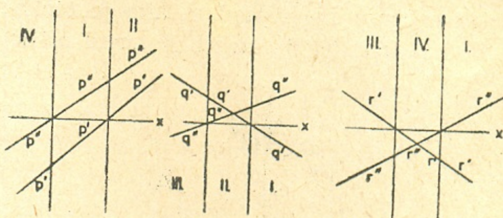
Sl. 19.

Vježba: 1. Kakav položaj ima pravac a, b, c, d, e, f, g i h u prostoru prema ravninama projekcija? (sl. 19). (Odgovor: $a \parallel \Pi_1$, $b \parallel \Pi_2$, $c \parallel x$, $d \perp \Pi_1$, $e \perp \Pi_2$,



Sl. 20.

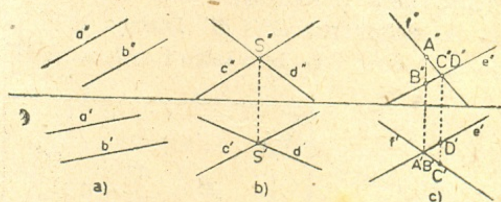
f u ravnini $\perp x$, g u Π_1 h u Π_2 — 2. Kakav je odnos projekcija točke i projekcija pravca ako točka leži na pravcu (A) i ako ne leži $(B, C$ i $D)$ (sl. 20). 3. U sl. 21 prikazani su pravci koji se protežu kroz 3 kvadranta; (p u IV., I. i II., q u III., II. i I., r u III., IV. i I.) po čemu se to vidi i nacrtaj još nekoliko takvih pravaca pa odredi kvadrante kroz koje prolaze?



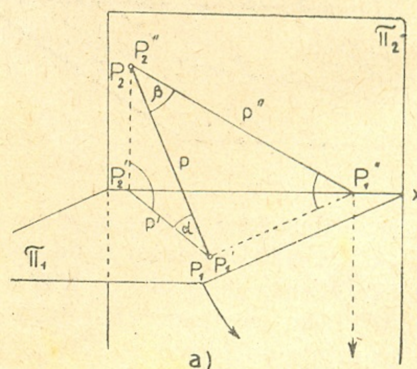
Sl. 21.

Pazi: pravac je sadržan samo u jednom kvadrantu ako je paralelan s osi x, a prolazi kroz dva kvadranta, ako je paralelan samo sa Π_1 ili samo sa Π_2.

7. *Dva pravca.* — Paralelni pravci (sl. 22a) imaju i projekcije paralelne t. j. $a' \parallel b'$ i $a'' \parallel b''$. — Ukršteni (sl. 25b) imaju sjecišta prvih projekcija (S') i sjecišta drugih projekcija (S'') u okomici (istoj) na osi x. Mimosmjerni pravci



Sl. 22.



Sl. 23.a

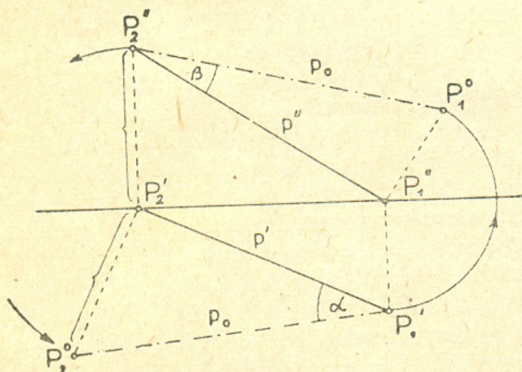
nemaju sjecišta prvih i drugih projekcija u jednoj okomici na x.

Vježba: 1. Zašto vrijede navedena pravila? 2. Što određuje 2 paralelna ili 2 ukrštena pravca u prostoru?

8. *Probodišta pravca s* Π_1 i Π_2. (sl. 23). Pravac je određen sa 2 točke. — Osobite točke pravca su njegova probodišta s Π_1 i Π_2 i često nam dobro dođu. — U sl. 23a) prikazana su prostorno probodišta P_1 (s Π_1) i P_2 (s Π_2) pravca p. Određene su projekcije P_1'' i P_2'. Ujedinimo li Π_1 s Π_2 u ravninu crtnje dobivamo sl. 23b).

Vidimo: gdje p' siječe os x tamo je P_2' (prva projekcija drugog probodišta), a u okomici na os x je P_2'' (u sjecištu s p'') i gdje p'' siječe os x tamo je P_1'' (druga projekcija prvog probodišta) a u okomici na os x je P_1' (u sjecištu s p') — Tako se traže probodišta pravca s Π_1 i Π_2 iz projekcija pravca.

Kako je $P_1' \equiv P_1$, $P_2'' \equiv P_2$, može se pisati P_1 mjesto P_1', a P_2 mjesto P_2'':



Sl. 23.b

Vježbe: 1. Odredi oba probodišta ovih pravaca: A (3, —1, 3) B (5, 1, 1); M (—2, —3, —1) N (1, —2, 3) 2. Kakav položaj imaju u prostoru točke: R (2, 3, —3) S (1, —2, 2) T (3, 5, —5) a onda još točke U (1, —2, —2) V (2, —1, —1)? 3. Zadana je dužina A (3, 2, 5) B (5, 6, 7) naći pravu veličinu.

9. *Prikloni kut pravca s* Π_1 *i* Π_2. (sl. 23). U slici 23a označeni su prikloni kutovi α (s Π_1) i β (sa Π_2). — Prave veličine tih kutova dobivene su u sl. 23b) prevaljivanjem trokuta $P'_1 P''_2 P'_2$ oko p' u Π_1 i prevaljivanjem trokuta $P'_1 P''_1 P''_2$ oko p'' u Π_2. Prvi put smo dobili priklon s Π_1 (α) a drugi put priklon s Π_2 (β). — Osim toga dobili smo svaki put i pravu veličinu (p_0) dijela pravca između oba probodišta.

U slijedećem broju donijet ćemo veći broj izrađenih zadataka u svrhu lakšeg shvaćanja osnova nacrtne geometrije.

prof. *Dragan Mutabžija*

Rješavanje iracionalnih nejednadžbi

Razmatrajmo iracionalne nejednadžbe oblika

$$f(x) > \sqrt[n]{g(x)} \quad \text{i} \quad f(x) < \sqrt[n]{g(x)}.$$

Kod rješavanja tih nejednadžbi treba razlikovati dva slučaja:

1. n je neparno, 2. n je parno.

Ako je n neparno, rješavanje je lako. Obje strane treba dići na n-tu potenciju, pa se dobivaju ekvivalentne nejednadžbe

$$f^n(x) > g(x) \quad \text{i} \quad f^n(x) < g(x).$$

Na primjer:

$$x - 2 > \sqrt[3]{x^3 - 5x^2 + 12}$$
$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 > x^3 - 5x^2 + 12$$
$$-x^2 + 12x - 20 > 0,$$
$$x^2 - 12x + 20 < 0,$$

ispunjeno za $2 < x < 10$.

2. n je parno. Uzmimo najprije nejednadžbu

$$f(x) > \sqrt[n]{g(x)}.$$

Prije svega mora $g(x)$ biti pozitivno: također mora $f(x)$ biti pozitivno; u tom slučaju mogu se obje strane dignuti na n-tu potenciju, što daje $f^n(x) > g(x)$.

Na pr. neka se riješi nejednadžba

$$x - 3 > \sqrt{x^2 - 5x + 4}.$$

Ta je nejednadžba ekvivalentna ovim trima:

$$1.\ x^2 - 5x + 4 > 0, \quad 2.\ x - 3 > 0.$$
$$3.\ (x - 3)^2 > x^2 - 5x + 4.$$

Iz prve izlazi $-\infty < x < 1$, $4 < x < \infty$, iz druge $x > 3$, iz treće $x^2 - 6x + 9 > x^2 - 5x + 4$ ili $-x + 5 > 0$, $x < 5$. Ukupno je rješenje $4 < x < 5$.

Uzmimo sad nejednadžbu

$$f(x) < \sqrt[n]{g(x)}.$$

Toj se nejednadžbi može zadovoljiti na 2 načina: ili je $g(x) > 0$ i $f(x) < 0$ ili $g(x) > 0$ i $f(x) > 0$ i $f^n(x) < g(x)$.

Na pr. $x - 2 < \sqrt{x^2 - x - 12}$.

Mora biti $x - 2 < 0$ i $x^2 - x - 12 > 0$ t. j. $x < 2$ i $x < -3$, $x > 4$; ukupno $x < -3$; ili $x - 2 > 0$, $x^2 - x - 12 > 0$ i $(x-2)^2 < x^2 - x - 12$ t. j. $x > 2$, $x < -3$, $x > 4$ i $x > \frac{16}{3}$ ili ukupno $x > \frac{16}{3}$.

Konačno je nejednadžbi udovoljeno za

$$x < -3 \text{ ili } x > \frac{16}{3}.$$

Primjeri. 1. Neka se riješi nejednadžba

$$\sqrt{2x-3} - \sqrt{x-5} < 4.$$

Mora biti $x > 5$. Imamo

$$\sqrt{2x-3} < 4 + \sqrt{x-5}$$

$$2x - 3 < 16 + 8\sqrt{x-5} + x - 5$$

$$x - 14 < 8\sqrt{x-5}.$$

Mora biti $x - 14 < 0$ t. j. ukupno $5 < x < 14$. Ili $x - 14 > 0$, $x - 5 > 0$, $(x - 14)^2 < 64(x-5)$. Iz posljednje nejednadžbe izlazi $x^2 - 92x + 516 < 0$ ispunjeno za $6 < x < 86$. Posljednji uvjet ispunjen za $14 < x < 86$. Iz prvog i drugog uvjeta izlazi $5 < x < 86$.

2. Neka se riješi nejednadžba

$$\sqrt{x+10} - \sqrt{x-2} > \sqrt{3x-2}.$$

Imamo

$$\sqrt{x+10} > \sqrt{x-2} + \sqrt{3x-2}.$$

Mora biti

$$x \geqq -10, \quad x \geqq 2, \quad x \geqq \frac{2}{3} \text{ t. j. } x \geqq 2.$$

Kvadrirajmo; izlazi

$$x + 10 > x - 2 + 2\sqrt{3x^2 - 8x + 4} + 3x - 2$$

ili

$$-3x + 14 > 2\sqrt{3x^2 - 8x + 4}.$$

Mora biti $14 - 3x > 0$ ili $x < \frac{14}{3}$.

Kvadrirajmo iznova: izlazi

$$9x^2 - 84x + 196 > 4(3x^2 - 8x + 4) \quad \text{ili}$$

$$3x^2 + 52x - 180 < 0$$

ispunjeno za $-20{,}29\ldots < x < 2{,}96\ldots$

Na koncu treba da riješimo sistem

$$x \geqq 2, \quad x < \frac{14}{3}, \quad -20{,}29\ldots < x < 2{,}96\ldots$$

Rješenje jest $2 \leqq x < 2{,}96\ldots$

Za svakog učenika

»Veliki« jedan puta jedan

Vrlo često se događa da učenik množeći brojeve od 11 do 19 lako čini greške, a u radu utroši dosta vremena. Nije to samo pojava kod učenika osnovne škole, već isto tako često i u srednjoj školi. Ima slučajeva da se učenik hvata i logaritamskih tablica da bi izračunao 16 · 18.

Svakako se ovome u osnovnoj školi, pa kasnije i u srednjoj školi, ne posvećuje nužna pažnja.

Ove školske godine, pri predbilježbi u I. razred jedne zagrebačke gimnazije vršena je anketa. Istini za volju nije anketa najavljena — a kako je vršena nije bilo ni potrebno.

Svakom je učeniku i učenici, koji je došao da se predbilježi za upis u I. razred te gimnazije rečeno, da će na licu mjesta polagati prijemni ispit. Odmah su i postavljena pitanja. Koliko je 16 · 12 i t. d. dakle samo »veliki« jedan puta jedan.

Začudo ni jedan učenik ili učenica, bez obzira na uspjeh u osnovnoj školi, nije to mogao lako izračunati. Evo kako je većina računala: 10 · 10 i 6 · 2 ili 16 · 10 i 6 · 2. Nekoliko njih (9%) je to izračunalo utrošivši više od 5 minuta. Većina je rekla da to može pismeno izračunati. Bilo je i suza i obećanja da će to do početka školske godine »naučiti«.

Mislim da ne treba naročito isticati koliko je nužno da učenik to nauči i uvježba već u petom razredu osnovne škole da lako to računa.

Poznato je da mnogi naši ljudi, koji nisu polazili više od četiri razreda osnovne škole, znaju to lako izračunati i to baš onako, kako bi to morali znati učenici viših razreda osnovne škole, a jasno i srednje škole.

Evo kako oni to jednostavno čine:

$$16 \cdot 14 = (16 + 4) \cdot 10 + 6 \cdot 4 = 224.$$

Jasno sve računa u sebi.

Učenik viših razreda osnovne škole (već u petom razredu to uči) treba da zna to i opravdati. To je jednostavno po osnovnim zakonima aritmetike:

$$16 \cdot 14 = 16 \cdot (10 + 4) = 16 \cdot 10 + 16 \cdot 4 = 16 \cdot 10 + (10 + 6) \cdot 4 = 16 \cdot 10 + 10 \cdot 4 + 6 \cdot 4 = (16 + 4) \cdot 10 + 6 \cdot 4.$$

Za praksu je potrebno pamtiti: Multiplikandu se pribroji jedinica multiplikatora — to pomnoži s 10 [(16 + 4) 10] i tome se pribroji umnožak jedinica (multiplikanda i multiplikatora) (6 · 4).

Uvježbaj ovo i služi se ovim — to će ti olakšati mnogo u radu i znat ćeš »veliki« jedan puta jedan.

prof. *B. Ž.*

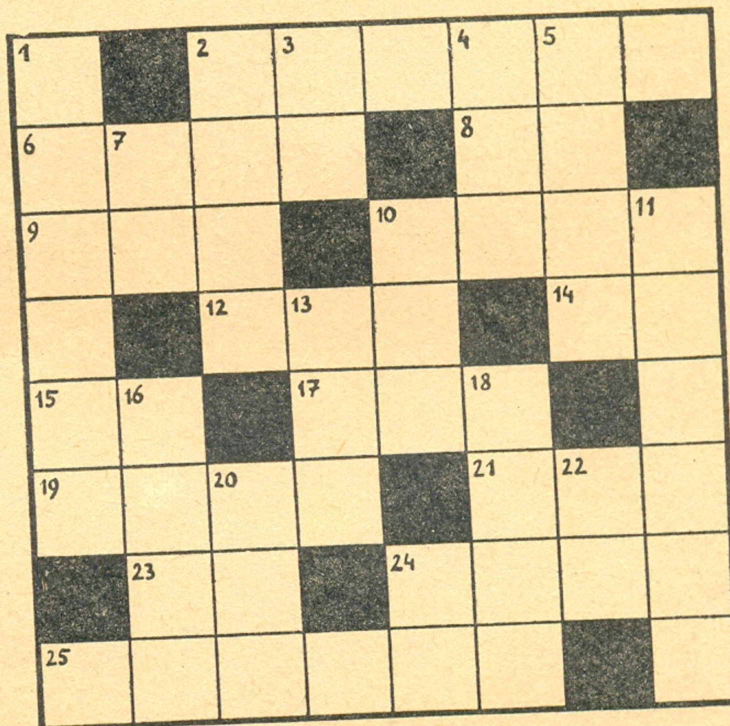
Математичка укрштеница

Милисав Калајџић, уч. 4 р. г. Чачак

У свако квадратно поље не долази по једно слово, већ по једна арапска цифра! Децималне запете не треба уносити.

Водоравно:

2. $log \sqrt[3]{\pi}$
6. $\sqrt[3]{1\,371\,330\,631}$
8. Највећи заједнички делилац бројева 210, 330 и 390
9. Збир $x + y + z$, ако је $x + y = 150$, $y + z = 186$, $z + x = 230$
10. Најмањи заједнички садржалац бројева 11 и 227
11. Површина коцке (којој је дијагонала стране $346\sqrt{2}$) увећана за $7 \cdot 2^2 \cdot 3^4$
12. Запремина зарубљене правилне четворостране пирамиде кад су дате основне ивице 2 и 6, и бочна ивица $2 \cdot \sqrt{83}$
13. Обичан разломак (написан бројилац и именилац један за другим) који претставља периодичан број 0,0909 . . .
14. Двоцифрени број коме је прва цифра двапут мања од друге, а ако цифре промене места, добијени број је за 9 већи од траженог
15. Површина делтоида с дијагоналама 22 и 3
16. Површина круга описаног око равностраног троугла стране $a = \frac{55\sqrt{3\pi}}{\pi}$ умањена за 12.
17. Двоструко растојање тачака $A\,(43,\ 21)$ и $B\,(-21,\ 21)$
19. Антилогаритам броја 3,85009
21. Минимум функције $y = x^2 + 8x + 38{,}5$
23. $log_3 59049$
24. Решење једначине $10^x = 272{,}9$
25. $\sqrt{56\,792\,132\,721}$



Усправно:

1. $log\ 1{,}347$
2. Решење једначине $3{,}3 + (100x - 0{,}3) : : 1{,}3 = 100x$
3. Број од кога 15% износи 1,65
4. Вредност израза $4\,(x + 8y) + 2x + 9y$ за $x = 75\frac{1}{3}$, $y = 2$.
5. $(32^2 - 11) \cdot 7$
7. Збир решења једначине $x^2 - 18x + 80 = 0$
10. Број под 13. усправно помножен с 2
18. Телесна дијагонала коцке ако јој је ивица $27{,}47\sqrt{3}$
20. Најмањи троцифрени прим број помножен са 8
22. Број страна у полигону са 230 дијагонала
24. Дужина кружног лука чији је полупречник $r = 84/\pi$ а централни угао α задовољава релацију $tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$.

Решење послати до 1. XII. 1959. На коверти назначити: „Математичка укрштеница“. Између ученика који правилно реше укрштеницу, ждребом ће се одредити њих 10 и наградити математичким књигама. Решење укрштенице објавит ће се у наредном броју.

Укрштеница се не мора изрезивати; довољно је решење на посебном папиру, читљиво потписаном.

Za vrijeme štampanja lista stigla su ova rješenja

Iz matematike: *Cankar Ivan*, 4. raz. g. Škofja Loka, 364, 365, 367, 375 (djel.); *Feher Kamilo*, 3. raz. g. Sombor, 366, 374; *Gros Mladen*, svrš. uč. 4. g. Ljubljana, sve zadatke; *Kovač Antun*, svrš. uč. g. Sombor, 363, 364, 365, 366, 367, 374; *Limburger Maćaš*, 2_4 raz. g. Sombor, 363, 364, 355, 366, 367, 368, 371, 373, 374; *Stanojević Jevrosima*, v. uč. 4. raz. g. »Sv. Mark.« Niš, 363, 364, 369, 370 (djel.); *Борота Предраг*, 4_4 р. 11 беогр. г. 364, 365, 371a); *Кирић Миодраг*, 4_3 раз. 2 гимн. Зрењанин, 375; *Кулманицки Владимир*, 3 р. г. Лазаревац, 366, 367; *Ћирић Слободан*, 4 р. г. »Ст. Церовић« Никшић, 363, 364, 365, 367, 371; *Drakulić Milan*, 3. r. rud. teh. škole Tuzla, 364 (djel.); *Čanji Ana*, 3_4 r. g. Sombor, 364, 365.

Iz fizike: *Cankar Ivan*, 4. r. g. Škofja Loka, 177; *Gros Mladen*, svrš. uč. 4. gimn. Ljubljana, sve zadatke; *Kovačina Marko*, 3. r. g. Mostar, 176, 177, 180; *Mesihović Behđed*, 4. raz. g. Mostar, 177; *Petrović Ivan*, 3. r. gimn. Koprivnica, 177, 178, 180; *Suljagić Salih*, 3.c r. g. »B. Ogrizović«, Zagreb, 178; *Кирић Миодраг*, 4_3 р. г. Зрењанин, 176, 180.

Rješenja, dopise i članke slati na Uredništvo »Matem.-fiz. lista«, Zagreb, Ilica 16/III., pošt. pretinac 165.

Svim suradnicima!

Svi rukopisi (osim učeničkih rješenja) treba da budu napisani pisaćim strojem, a crteži izrađeni tušem na posebnom čvrstom papiru. Rukopisi se ne vraćaju.

Rješavateljima zadataka

U rješenjima treba uvijek napisati i sam zadatak s rednim brojem, ne pozivajući se na broj i datum »Mat.-fiz. lista«, u kome je bio postavljen. Svako rješenje zadataka pisati na posebnom papiru (četvrtini ili pola arka) i to samo na jednoj strani papira. — Svako rješenje treba čitljivo potpisati (ime i prezime), naznačujući razred, školu i mjesto. Nečitljiva i neuredna rješenja ne će se uopće uzeti u obzir.

Umoljavaju se rješavatelji, da samostalno rješavaju zadatke ne tražeći nikako pomoći od nastavnika, a niti od koga drugoga. Umoljavaju se također rješavatelji, da propisno frankiraju listove, koje šalju našoj redakciji.